Beginn **Test: Gemischte Aufgaben**

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
$\ln(e^9) - e^{\ln(5)} =$

2. $\int (3 + 8x + 6x^2)\, dx =$

3. $\int \sin(4x)\, dx =$

4. $\int_1^3 2x\, dx =$

5. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 2e^{8x}$?

(a) $\frac{1}{4}e^{8x}$ (b) e^{8x} (c) $\frac{1}{4}e^{x}$ (d) $16e^{8x}$

Antworten auf offene Fragen:

6. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{2}{x} - 2\cos(4x)$?

(a) $\ln(2x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$ (b) $2\ln(x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$

(c) $2\ln(x) + \frac{1}{2}\sin(4x)$ (d) $2\ln(x) - 2\sin(4x)$

7. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $\sin^3(3x)$

$\frac{d}{dx}(\sin^3(3x)) =$ $\boxed{}$

8. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x)$?

(a) $-\cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$ (b) $\cos(x) \cdot \cos(2x) - \sin(x) \cdot \sin(2x)$

(c) $\cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$ (d) $2\cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$

9. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 2\sqrt{2x}$?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{2x}}$

Antworten auf offene Fragen:

10. Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \cos(2x) - 3x^2 + \ln(5x)$$

$$f'(x) = \boxed{}$$

$$f''(x) = \boxed{}$$

11. Eine Funktion f ist im Intervall $[a, b]$ linksgekrümmt, wenn für alle x mit $a < x < b$ gilt:

(a) $f(x) > 0$ (b) $f(x) < 0$ (c) $f'(x) > 0$

(d) $f'(x) < 0$ (e) $f''(x) > 0$ (f) $f''(x) < 0$

12. Bestimmen Sie die Nullstellen und Polstellen von $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{2x^2 + 4x - 6}$

Eingabe: Reihenfolge egal, durch Komma getrennt.

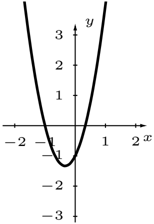
Nullstellen $\boxed{}$

Polstellen $\boxed{}$

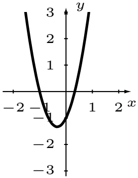
Antworten auf offene Fragen:

13. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
$\log_2(24) - \log_2(3) =$

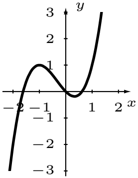
14. Welche Funktion ist eine richtige Stammfunktion zu $f(x)$?



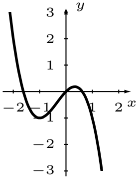
(a)



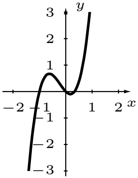
(b)



(c)



(d)



Antworten auf offene Fragen:

Frage	Beantwortet	Seite	Frage	Beantwortet	Seite
1	☐	1	**8**	☐	2
2	☐	1	**9**	☐	2
3	☐	1	**10**	☐	3
4	☐	1	**11**	☐	3
5	☐	1	**12**	☐	3
6	☐	2	**13**	☐	4
7	☐	2	**14**	☐	4

Ende Punkte: Korrigiere

Lösungen der Aufgaben

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 1.

Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus sind Umkehrfunktionen. Das bedeutet:

$$\ln(e^x) = x \qquad \text{und} \qquad e^{\ln(x)} = x$$

Dementsprechend ergibt sich:

$$\ln(e^9) = 9 \quad \text{und} \quad e^{\ln(5)} = 5$$

$$\ln(e^9) - e^{\ln(5)} = 9 - 5 = 4$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 2.

Es müssen die einzelnen Summanden mit der Regel

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

integriert werden. Dabei wird die Zahl 3 als $3 \cdot x^0$ interpretiert.

$$\begin{aligned}\int (3 + 8x + 6x^2) \, dx &= \int (3 \cdot x^0 + 8 \cdot x^1 + 6 \cdot x^2) \, dx \\ &= \frac{3}{1} \cdot x^1 + \frac{8}{2} \cdot x^2 + \frac{6}{3} \cdot x^3 = 3x + 4x^2 + 2x^3\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 3.

Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist $F(x) = -\cos(x)$. Jetzt soll aber $\sin(4x)$ integriert werden. Streng genommen müsste man hier mit einer Substitution $z := 4x$ arbeiten. Man kann aber auch ein bisschen probieren. Würde man die Funktion $-\cos(4x)$ differenzieren, bräuchte man die Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}(-\cos(4x)) = -(-\sin(4x)) \cdot 4 = 4\sin(4x)$$

Um den Faktor 4 zu neutralisieren ergibt sich somit beim Integral

$$\int \sin(4x)\ dx = -\frac{1}{4}\cos(4x)$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) = -\frac{1}{4} \cdot (-\sin(4x)) \cdot 4 = \sin(4x)$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 4.

Hier ist ein bestimmtes Integral gesucht

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 5.

Hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren. Dabei muss jedes mal die Kettenregel benutzt werden.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}e^{8x}\right) = \frac{1}{4}\cdot e^{8x}\cdot 8 = 2e^{8x} \qquad \text{(richtig)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{8x}\right) = e^{8x}\cdot 8 = 8e^{8x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}e^{x}\right) = \frac{1}{4}\cdot e^{x} = \frac{1}{4}e^{x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(16e^{8x}\right) = 16\cdot e^{8x}\cdot 8 = 128e^{8x} \qquad \text{(falsch)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 6.

Auch hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(2x) - \frac{1}{2}\sin(4x)\right) = \frac{1}{2x}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\cos(4x)\cdot 4 = \frac{1}{x} - 2\cos(4x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln(x) - \frac{1}{2}\sin(4x)\right) = 2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos(4x)\cdot 4 = \frac{2}{x} - 2\cos(4x) \qquad \text{(richtig)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln(x) + \frac{1}{2}\sin(4x)\right) = 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cos(4x)\cdot 4 = \frac{2}{x} + 2\cos(4x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln(x) - 2\sin(4x)\right) = 2\cdot\frac{1}{x} - 2\cos(4x)\cdot 4 = \frac{2}{x} - 8\cos(4x) \qquad \text{(falsch)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 7.

Hier braucht man mehrfach die Kettenregel. Zunächst muss man die Schreibweise

$$\sin^3(3x) = (\sin(3x))^3$$

umwandeln.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin^3(3x)) &= \frac{d}{dx}((\sin(3x))^3) \\
&= 3 \cdot (\sin(3x))^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin(3x)) && \text{(Ableiten von } (\star)^3\text{)} \\
&= 3(\sin(3x))^2 \cdot (\cos(3x)) \cdot \frac{d}{dx}(3x) && \text{(Ableiten von } \sin(\star)\text{)} \\
&= 3(\sin(3x))^2 \cdot (\cos(3x)) \cdot 3 && \text{(Ableiten von } 3x\text{)} \\
&= 9\sin^2(3x)\cos(3x)
\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 8.

Hier braucht man die Produktregel.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(\sin(x)\cdot\cos(2x)) \\
&= \frac{d}{dx}(\sin(x))\cdot\cos(2x) + \sin(x)\cdot\frac{d}{dx}(\cos(2x)) && \text{(Produktregel)} \\
&= \cos(x)\cdot\cos(2x) + \sin(x)\cdot(-\sin(2x)\cdot 2) && \text{(Kettenregel)} \\
&= \cos(x)\cdot\cos(2x) - 2\sin(x)\cdot\sin(2x)
\end{aligned}
$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 9.

Am Besten schreibt man die Wurzel als Potenz. Dabei auf die Klammer achten, da $2x$ unter der Wurzel stehen.

$$2\sqrt{2x} = 2(2x)^{\frac{1}{2}}$$

Dann benutzt man die Regel

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Zum Schluss an die Kettenregel denken. Somit ergibt sich

$$\frac{d}{dx}(2(2x)^{\frac{1}{2}}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{4}{2\sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt{2x}}$$

Man könnte das Ergebnis noch weiter vereinfachen

$$\frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 10.

$$f(x) = \cos(2x) - 3x^2 + \ln(5x)$$

Beim Ableiten der einzelnen Summenden braucht man mehrfach die Kettenregel.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = -2\sin(2x) - 6x + 5 \cdot \frac{1}{5x} = -2\sin(2x) - 6x + \frac{1}{x}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung benutzt man am Besten wieder

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

und es ergibt sich

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -4\cos(2x) - 6 - \frac{1}{x^2}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 11.

Die erste Ableitung einer Funktion gibt Auskunft über das Monotonieverhalten, die zweite Ableitung über das Krümmungsverhalten. Wenn die zweite Ableitung positiv ist $f''(x) > 0$, so ist die erste Ableitung streng monoton steigend. Die Steigung der Funktion wird also (von links nach rechts gesehen) immer größer. Somit ist die Kurve linksgekrümmt. zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 12.

f hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$. Damit muss in diesem Falle der Zähler Null werden und der Nenner darf nicht gleichzeitig Null sein.

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \iff x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Also $x_1 = 5$ und $x_2 = -2$. Offensichtlich ist der Nenner $2x^2 + 43x - 6$ weder bei -2 noch bei 5 gleich Null.
Als Polstellen kommen nur die Nullstellen des Nenners in Frage.

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

Also $x_3 = 1$ und $x_4 = -3$. Da der Zähler an diesen beiden Stellen nicht Null ist, handelt es sich auf jeden Fall um Polstellen. (Andernfalls kämen auch stetig ergänzbare Lücken im Definitionsbereich in Frage.)

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 13.

Hier braucht man die Rechenregel:

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(x \div y)$$

$$\log_2(24) - \log_2 3 = \log_2(24 \div 3)$$
$$= \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 14.

Die Nullstellen der Funktion oben sind die Kandidaten für die Extremstellen der fraglichen Stammfunktion. Eine ist bei -1, die andere liegt im Intervall $[0; 1]$. Damit scheidet sofort die Möglichkeit a) aus, da da deren einzige Extremstelle im Intervall $[-1; 0]$ liegt. Die Funktion d) hat bei -1 eine Nullstelle, aber keine Extremstelle und scheidet auch aus. Wenn die Funktion $f(x)$ positiv ist, muss die fragliche Stammfunktion monoton steigen. Da $f(x)$ zwischen den beiden Nullstellen negativ ist, muss die fragliche Stammfunktion zwischen den Extremstellen fallen, also links ein lokales Maximum haben und rechts ein lokales Minimum. Daher kommt nur b) in Frage. zurück zur Aufgabe