Beginn **Test: Gemischte Aufgaben**

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
$$\frac{4^6}{4^5 \cdot 4^2} =$$

2. $\displaystyle\int (6 + 2x + 9x^2)\, dx =$

3. $\displaystyle\int \cos(2x)\, dx =$

4. $\displaystyle\int_2^4 4x\, dx =$

5. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 2e^{5x}$?

(a) $2e^{5x}$ (b) $\frac{2}{5}e^{4x}$ (c) $\frac{2}{5}e^{5x}$ (d) $10e^{5x}$

Richtige Antworten auf offene Fragen:

6. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{3}{2x} - \sin(2x)$?

(a) $3\ln(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$ (b) $3\ln(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$

(c) $\frac{3}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$ (d) $\frac{3}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$

7. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $2\cos^3(6x)$

$\frac{d}{dx}(2\cos^3(6x)) =$ $\boxed{}$

8. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 4\ln(2x) \cdot 5x^3$?

(a) $20x^2 + 20x^2\ln(2x)$ (b) $40x^2 + 20x^2\ln(2x)$

(c) $20x^2 + 60x^2\ln(2x)$ (d) $20x^2 + 60x^2\ln(x)$

9. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 4\sqrt{4x}$?

(a) $\frac{2}{\sqrt{4x}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{8}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{16}{\sqrt{x}}$

Richtige Antworten auf offene Fragen:

10. Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) = 2\cos(x) - 4x^3 + 4\ln(x)$$

$f'(x) = \boxed{}$

$f''(x) = \boxed{}$

11. Man betrachte eine Funktion $f(x)$. Welche Aussagen sind hinreichend für die Existenz eines Wendepunkts an der Stelle x_0?

(a) $f'(x_0) = 0$ (b) $f'(x_0) \neq 0$ (c) $f''(x_0) = 0$

(d) $f''(x_0) \neq 0$ (e) $f'''(x_0) = 0$ (f) $f'''(x_0) \neq 0$

12. Bestimmen Sie die Nullstellen und Polstellen von $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 4}$

Eingabe: Reihenfolge egal, durch Komma getrennt.

Nullstellen $\boxed{}$

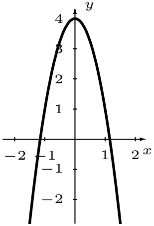
Polstellen $\boxed{}$

Richtige Antworten auf offene Fragen:

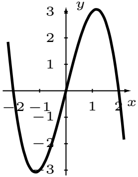
13. Berechnen Sie den Ausdruck ohne Taschenrechner:

$$\frac{1}{5}\lg(32)+\lg(5)=$$

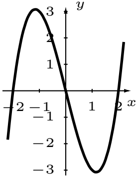
14. Welche Funktion ist eine richtige Stammfunktion?



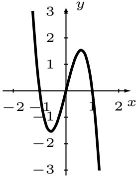
(a)



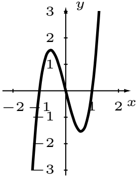
(b)



(c)



(d)



Richtige Antworten auf offene Fragen:

Frage	Beantwortet	Seite	Frage	Beantwortet	Seite
1	☐	1	**8**	☐	2
2	☐	1	**9**	☐	2
3	☐	1	**10**	☐	3
4	☐	1	**11**	☐	3
5	☐	1	**12**	☐	3
6	☐	2	**13**	☐	4
7	☐	2	**14**	☐	4

Ende Punkte: Korrigiere

Lösungen der Aufgaben

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 1.

Hier braucht man die Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$\frac{4^6}{4^5 \cdot 4^2} = \frac{4^6}{4^{5+2}} = \frac{4^6}{4^7} = 4^{6-7} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 2.

Es müssen die einzelnen Summanden mit der Regel

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

integriert werden. Dabei wird die Zahl 6 als $6 \cdot x^0$ interpretiert.

$$\int (6 + 2x + 9x^2) \, dx = \int (6 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 9 \cdot x^2) \, dx$$

$$= \frac{6}{1} \cdot x^1 + \frac{2}{2} \cdot x^2 + \frac{9}{3} \cdot x^3 = 6x + x^2 + 3x^3$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 3.

Die Stammfunktion der Funktion $\cos(x)$ ist $\sin(x)$. Jetzt soll aber $\cos(2x)$ integriert werden. Streng genommen müsste man hier mit einer Substitution $z := 2x$ arbeiten. Man kann aber auch ein bisschen probieren. Würde man die Funktion $\sin(2x)$ differenzieren, bräuchte man die Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}(\sin(2x)) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

Um den Faktor 2 zu neutralisieren ergibt sich somit beim Integral

$$\int \cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 4.

Hier ist ein bestimmtes Integral gesucht

$$\int_2^4 4x\,dx = \left[2x^2\right]_2^4 = 2\cdot 4^2 - 2\cdot 2^2 = 24$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 5.

Hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren. Dabei muss jedes mal die Kettenregel benutzt werden.

$$\frac{d}{dx}\left(2e^{5x}\right) = 2 \cdot e^{5x} \cdot 5 = 10e^{5x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}e^{4x}\right) = \frac{2}{5} \cdot e^{4x} \cdot 4 = \frac{8}{5}e^{4x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}e^{5x}\right) = \frac{2}{5} \cdot e^{5x} \cdot 5 = 2e^{5x} \qquad \text{(richtig)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(10e^{5x}\right) = 10 \cdot e^{5x} \cdot 5 = 50e^{5x} \qquad \text{(falsch)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 6.

Auch hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren.

$$\frac{d}{dx}\left(3\ln(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=3\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2=\frac{3}{x}-\sin(2x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(3\ln(2x)-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=3\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2=\frac{3}{x}+\sin(2x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2=\frac{3}{2x}+\sin(2x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2=\frac{3}{2x}-\sin(2x) \qquad \text{(richtig)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 7.

Hier braucht man mehrfach die Kettenregel. Zunächst muss man die Schreibweise

$$\cos^3(6x) = (\cos(6x))^3$$

umwandeln.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2\cos^3(6x)) &= \frac{d}{dx}(2(\cos(6x))^3) \\
&= 2 \cdot 3 \cdot (\cos(6x))^2 \cdot \frac{d}{dx}(\cos(6x)) && \text{(Ableiten von } (\star)^3\text{)} \\
&= 6(\cos(6x))^2 \cdot (-\sin(6x)) \cdot \frac{d}{dx}(6x) && \text{(Ableiten von } \cos(\star)\text{)} \\
&= -6(\cos(6x))^2 \cdot \sin(6x) \cdot 6 && \text{(Ableiten von } 6x\text{)} \\
&= -36\cos^2(6x)\sin(6x)
\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 8.

Hier braucht man die Produktregel.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(4\ln(2x)\cdot 5x^3) &= \frac{d}{dx}(20\ln(2x)\cdot x^3) && \text{(Faktoren zusammenfassen)}\\
&= 20\cdot\frac{d}{dx}(\ln(2x)\cdot x^3) && \text{(Konstante vorziehen)}\\
&= 20\left(\frac{d}{dx}(\ln(2x))\cdot x^3+\ln(2x)\cdot\frac{d}{dx}(x^3)\right) && \text{(Produktregel)}\\
&= 20\left(\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot x^3+\ln(2x)\cdot 3x^2\right)\\
&= 20\left(x^2+3x^2\ln(2x)\right) = 20x^2+60x^2\ln(2x)
\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 9.

Zunächst kann man die Funktion etwas vereinfachen:

$$4\sqrt{4x} = 4 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = 8\sqrt{x}$$

Dann schreibt man die Wurzel als Potenz

$$8\sqrt{x} = 8x^{\frac{1}{2}}$$

Dann benutzt man die Regel

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}(8x^{\frac{1}{2}}) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 4x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 10.

$$f(x) = 2\cos(x) - 4x^3 + 4\ln(x)$$

Die einzelnen Summanden kann man alle direkt ableiten.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = -2\sin(x) - 12x^2 + \frac{4}{x}$$

Bei der Berechnung der zweiten Ableitung nutzt man am Besten

$$\frac{4}{x} = 4 \cdot x^{-1}$$

Somit ergibt sich

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -2\cos(x) - 24x - \frac{4}{x^2}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 11.

An einem Wendepunkt ändert die Funktion ihr Krümmungsverhalten. Der Wert der ersten Ableitung hat keinen Einfluss auf die Existenz eines Wendepunkts, entscheidend ist die zweite Ableitung. Sofern diese existiert, muss die zweite Ableitung Null sein. Allerdings kann die zweite Ableitung durchaus auch Null sein, ohne dass ein Wendepunkt vorliegt. Ein Beispiel ist $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$. Diese Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Wendepunkt. Wenn aber die dritte Ableitung verschieden von Null ist, liegt mit Sicherheit ein Wendepunkt vor.

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 12.

f hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$. Damit muss in diesem Falle der Zähler Null werden und der Nenner darf nicht gleichzeitig Null sein.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Also $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$. Offensichtlich ist der Nenner $x^2 - 3x - 4$ weder bei 2 noch bei 3 gleich Null.
Als Polstellen kommen nur die Nullstellen des Nenners in Frage.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x_{3/4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Also $x_3 = 4$ und $x_4 = -1$. Da der Zähler an diesen beiden Stellen nicht Null ist, handelt es sich auch jeden Fall um Polstellen. (Andernfalls kämen auch stetig ergänzbare Lücken im Definitionsbereich in Frage.

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 13.

Die Schreibweise $\lg(x)$ bedeutet: $\log_{10}(x)$.
Zunächste braucht man die Rechenregel:

$$\lg(x^n) = n\lg(x)$$

$$\frac{1}{5}\lg(32) = \frac{1}{5}\lg(2^5) = \frac{1}{5}\cdot 5\lg(2) = \lg(2)$$

Dann nutzt man

$$\lg(x) + \lg(y) = \lg(x \cdot y)$$

Somit erhält man:

$$\lg(2) + \lg(5) = \lg(2 \cdot 5) = \lg(10) = \log_{10}(10) = 1$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 14.

Die Nullstellen der Funktion oben sind die Kandidaten für die Extremstellen der fraglichen Stammfunktion. Diese liegen einmal im Intervall $[-2;-1]$ und einmal im Intervall $[1;2]$. Damit scheiden die Möglichkeiten c) und d) aus, da deren Extremstellen im Intervall zwischen -1 und 1 sind. Wenn die Funktion $f(x)$ positiv ist, muss die fragliche Stammfunktion monoton steigen. Da $f(x)$ zwischen den beiden Nullstellen positiv ist, muss die fragliche Stammfunktion zwischen den Extremstellen steigen, also links ein lokales Minimum haben und rechts ein lokales Maximum. Daher kommt nur a) in Frage. zurück zur Aufgabe