Beginn **Test: Gemischte Aufgaben**

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
$\sqrt[3]{4^2} \div \sqrt[3]{4^{-1}} =$

2. $\displaystyle\int (4x + 12x^2 + 5)\, dx =$

3. $\displaystyle\int 2\cos(8x)\, dx =$

4. $\displaystyle\int_1^2 8x^3\, dx =$

5. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 3e^{4x}$?

(a) $\frac{3}{4}e^{4x}$ (b) $12e^{4x}$ (c) $\frac{3}{4}e^{3x}$ (d) $\frac{3}{4}e^{x}$

Antworten auf offene Fragen:

6. Welche Funktion ist eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{2x} - 3\sin(3x)$?

(a) $\frac{1}{2}\ln(2x) - \cos(3x)$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x) + \cos(3x)$

(c) $\frac{1}{2}\ln(x) - \cos(3x)$ (d) $\frac{1}{2}\ln(x) + 3\cos(3x)$

7. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $4\cos^2(3x)$

$\frac{d}{dx}(4\cos^2(3x)) =$ $\boxed{}$

8. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 5\sin(3x) \cdot 3x^2$?

(a) $45x^2\cos(3x) + 15x\sin(3x)$ (b) $-45x^2\cos(3x) + 30x\sin(3x)$

(c) $15x^2\cos(3x) + 30x\sin(3x)$ (d) $45x^2\cos(3x) + 30x\sin(3x)$

9. Wie lautet die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16x}$?

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{x}}$

Antworten auf offene Fragen:

10. Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) = 2\sin(3x) - 5x^3 + \exp(3x)$$

$$f'(x) = \boxed{}$$

$$f''(x) = \boxed{}$$

11. Eine Funktion f ist im Intervall $[a, b]$ linksgekrümmt, wenn für alle x mit $a < x < b$ gilt:

(a) $f(x) > 0$ (b) $f(x) < 0$ (c) $f'(x) > 0$

(d) $f'(x) < 0$ (e) $f''(x) > 0$ (f) $f''(x) < 0$

12. Bestimmen Sie die Nullstellen und Polstellen von $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 5x + 6}$

Eingabe: Reihenfolge egal, durch Komma getrennt.

Nullstellen $\boxed{}$

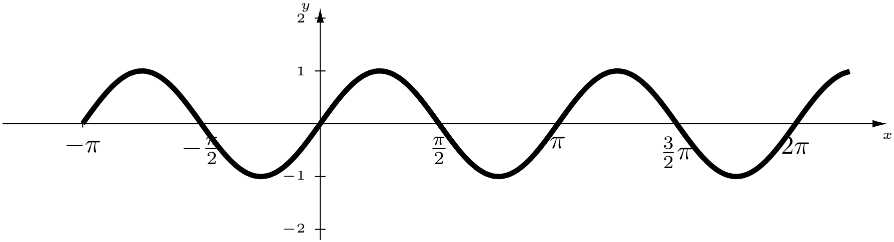
Polstellen $\boxed{}$

Antworten auf offene Fragen:

13. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\ln(16) - \ln(4) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

14. Welche Sinusfunktion ist hier dargestellt?



(a) $2\sin(x)$ (b) $\sin(2x)$ (c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ (d) $\sin(x)$

Antworten auf offene Fragen:

Frage	Beantwortet	Seite	Frage	Beantwortet	Seite
1	☐	1	**8**	☐	2
2	☐	1	**9**	☐	2
3	☐	1	**10**	☐	3
4	☐	1	**11**	☐	3
5	☐	1	**12**	☐	3
6	☐	2	**13**	☐	4
7	☐	2	**14**	☐	4

Ende   Punkte: Korrigiere

Lösungen der Aufgaben

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 1.

Am Besten schreibt man hier die Wurzeln als Potenzen und nutzt die Potenzgesetze

$$\sqrt[3]{4^2} \div \sqrt[3]{4^{-1}} = 4^{\frac{2}{3}} \div 4^{-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{3})} = 4^{\frac{3}{3}} = 4^1 = 4$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 2.

Es müssen die einzelnen Summanden mit der Regel

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

integriert werden. Dabei wird die Zahl 5 als $5 \cdot x^0$ interpretiert.

$$\int (4x + 12x^2 + 5) \, dx = \int (4 \cdot x^1 + 12 \cdot x^2 + 5 \cdot x^0) \, dx$$

$$= \frac{4}{2} \cdot x^2 + \frac{12}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{1} \cdot x^1 = 2x^2 + 4x^3 + 5x$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 3.

Der Faktor 2 kann als konstanter Faktor vor das Integral geschrieben werden. Die Stammfunktion der Funktion $\cos(x)$ ist $\sin(x)$. Jetzt soll aber $\cos(8x)$ integriert werden. Streng genommen müsste man hier mit einer Substitution $z := 8x$ arbeiten. Man kann aber auch ein bisschen probieren. Würde man die Funktion $\sin(8x)$ differenzieren, bräuchte man die Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}(\sin(8x)) = (\cos(8x)) \cdot 8 = 8\cos(8x)$$

Um den Faktor 8 zu neutralisieren ergibt sich somit beim Integral

$$\int \cos(8x)\ dx = \frac{1}{8}\sin(8x)$$

bzw.

$$\int 2\cos(8x)\ dx = 2 \cdot \frac{1}{8}\sin(8x) = \frac{1}{4}\sin(8x)$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sin(8x)\right) = \frac{1}{4} \cdot \cos(8x) \cdot 8 = 2\cos(8x)$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 4.

Hier ist ein bestimmtes Integral gesucht

$$\int_1^2 8x^3 \, dx = \left[\frac{8}{4}x^4\right]_1^2 = 2 \cdot 2^4 - 2 \cdot 1^4 = 30$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 5.

Hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren. Dabei muss jedes mal die Kettenregel benutzt werden.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}e^{4x}\right) = \frac{3}{4}\cdot e^{4x}\cdot 4 = 3e^{4x} \qquad \text{(richtig)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(12e^{4x}\right) = 12\cdot e^{4x}\cdot 4 = 48e^{4x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}e^{3x}\right) = \frac{3}{4}\cdot e^{3x}\cdot 3 = \frac{9}{4}e^{3x} \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}e^{x}\right) = \frac{3}{4}\cdot e^{x} = \frac{3}{4}e^{x} \qquad \text{(falsch)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 6.

Auch hier muss man an sich nicht integrieren, sondern es genügt, die vier angegebenen Funktionen zu differenzieren.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(2x) - \cos(3x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2 + \sin(3x)\cdot 3 = \frac{1}{2x} + 3\sin(3x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x) + \cos(3x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \sin(3x)\cdot 3 = \frac{1}{2x} - 3\sin(3x) \qquad \text{(richtig)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x) - \cos(3x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \sin(3x)\cdot 3 = \frac{1}{2x} + 3\sin(3x) \qquad \text{(falsch)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x) + 3\cos(3x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - 3\sin(3x)\cdot 3 = \frac{1}{2x} - 9\sin(3x) \qquad \text{(falsch)}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 7.

Hier braucht man mehrfach die Kettenregel. Zunächst muss man die Schreibweise

$$4\cos^2(3x) = 4(\cos(4x))^2$$

umwandeln.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(4\cos^2(3x)) &= \frac{d}{dx}(4(\cos(4x))^2) \\
&= 4 \cdot 2 \cdot (\cos(3x)) \cdot \frac{d}{dx}(\cos(3x)) && \text{(Ableiten von } (\star)^2\text{)} \\
&= 8(\cos(3x)) \cdot (-\sin(3x)) \cdot \frac{d}{dx}(3x) && \text{(Ableiten von } \cos(\star)\text{)} \\
&= -8(\cos(3x)) \cdot (\sin(3x)) \cdot 3 && \text{(Ableiten von } 3x\text{)} \\
&= -24\cos(3x)\sin(3x)
\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 8.

Hier braucht man die Produktregel. Vorher fast man am Besten die Faktoren zusammen

$$5\sin(3x)\cdot 3x^2 = 15\sin(3x)x^2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(15\sin(3x)x^2)\\
&= \frac{d}{dx}(15\sin(3x))\cdot x^2 + 15\sin(3x)\cdot\frac{d}{dx}(x^2) && \text{(Produktregel)}\\
&= 15\cos(3x)\cdot 3\cdot x^2 + 15\sin(3x)\cdot(2x) && \text{(Kettenregel)}\\
&= 45x^2\cos(3x) + 30\sin(3x)\cdot x\\
&= 45x^2\cos(3x) + 30x\sin(3x)
\end{aligned}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 9.

Am Besten vereinfacht man den Ausdruck und schreibt dann die Wurzel als Potenz.

$$\frac{1}{2}\sqrt{16x} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$$

Dann benutzt man die Regel

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{d}{dx}(2(x)^{\frac{1}{2}}) = 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Man könnte auch wie folgt rechnen:

$$\frac{1}{2}\sqrt{16x} = \frac{1}{2}(16x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}(16x)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(16x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 16 = \frac{4}{\sqrt{16x}}$$

Dies kann man aber auch vereinfachen und erhält wieder

$$\frac{4}{\sqrt{16x}} = \frac{4}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 10.

$$f(x) = 2\sin(3x) - 5x^3 + \exp(3x)$$

Beim Ableiten der einzelnen Summenden braucht man mehrfach die Kettenregel.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{df}{dx}(x) &= 2\cos(3x)\cdot 3 - 5\cdot 3x^2 + \exp(3x)\cdot 3 \\ &= 6\cos(3x) - 15x^2 + 3\exp(3x) \end{aligned}$$

Ähnlich bestimmt man die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -18\sin(3x) - 30x + 9\exp(3x)$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 11.

Die erste Ableitung einer Funktion gibt Auskunft über das Monotonieverhalten, die zweite Ableitung über das Krümmungsverhalten. Wenn die zweite Ableitung positiv ist $f''(x) > 0$, so ist die erste Ableitung streng monoton steigend. Die Steigung der Funktion wird also (von links nach rechts gesehen) immer größer. Somit ist die Kurve linksgekrümmt. zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 12.

f hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$. Damit muss in diesem Falle der Zähler Null werden und der Nenner darf nicht gleichzeitig Null sein.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

Also $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$ und es gilt $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$. Offensichtlich ist der Nenner $x^2 + 5x + 6$ weder bei -1 noch bei 5 gleich Null.
Als Polstellen kommen nur die Nullstellen des Nenners in Frage.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \iff x_{3/4} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Also $x_3 = -2$ und $x_4 = -3$. Da der Zähler an diesen beiden Stellen nicht Null ist, handelt es sich auch jeden Fall um Polstellen. (Andernfalls kämen auch stetig ergänzbare Lücken im Definitionsbereich in Frage.) zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben
Frage 13.

Hier braucht man zunächst die Rechenregel:

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln(x \div y)$$

$$\ln(16) - \ln(4) = \ln(16 \div 4) = \ln(4) \Rightarrow \ln(16) - \ln(4) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Weiterhin gilt: $$a\ln(x) = \ln(x^a).$$

Also erhält man:

$$\ln(4) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4) + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

Dann nutzt man:

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$$

$$\Rightarrow \ln(4) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) = \ln(1) = 0$$

zurück zur Aufgabe

Test: Gemischte Aufgaben

Frage 14.

Der größte Funktionswert der dargestellten Funktion ist 1. Somit scheidet die Antworten $2\sin(x)$ aus, deren größter Wert 2 wäre. Alle anderen Antwortmöglichkeiten unterscheiden sich nur in ihrer Periodendauer. D.h. welchen Wert p kann man zu allen x addieren, so dass sich der gleiche Funktionswert ergibt. In der Abbildung kann man eine Periode von $p = \pi$ erkennen. (Z.B Abstand von Maximum zu Maximum). Die Periode einer normalen Sinusfunktion beträgt 2π. Damit bleibt nur die Frage, wie sich ein Faktor vor dem x auswirkt. Da eine normale Sinusfunktion die Periode 2π hat, kann man immer 2π addieren, ohne dass sich etwas ändert.

$$\sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) \qquad \text{(Periode } \pi\text{)}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi)\right) \qquad \text{(Periode } 4\pi\text{)}$$

Somit ist die richtige Antwort $\sin(2x)$

zurück zur Aufgabe