

Übungen Funktionen, Differenzieren und Integrieren

Aufgabe 1:

Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen. Man bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes, berechne die Nullstellen und skizziere die Parabeln:

$$y = x^2 - 4x + 3; \quad y = 3x^2 + 6x; \quad y = 2x^2 - 10x + 12; \quad y = -x^2 + 8x - 16$$

Aufgabe 2:

Bilden Sie die Umkehrfunktionen zu folgenden Funktionen und geben Sie jeweils Definitionsbereich und Wertebereich an:

$$y = \frac{4x + 1}{x + 2}; \quad y = \sqrt{6 - 2x}; \quad y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

Aufgabe 3:

Die mittelbaren (verketteten) Funktionen $y = f[h(g(x))]$ sind in äußere und innere Funktionen $y = f(w)$, $w = h(z)$ und $z = g(x)$ zu zerlegen.

$$y = e^{(x+1)^2}; \quad y = (e^{x+1})^2; \quad y = \sin \ln(x + 2); \quad y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$$

Aufgabe 4:

Die mittelbaren (verketteten) Funktionen $y = f[h\{g(k(x))\}]$ sind in äußere und innere Funktionen $y = f(v)$, $v = h(w)$, $w = g(z)$ und $z = k(x)$ zu zerlegen.

$$y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}}; \quad y = \log_3 \left[\sqrt{2^x + 1} \right]; \quad y = \sin \left[\cos \frac{x - 4}{3} \right]^2$$

Aufgabe 5:

In welchen Kurvenpunkten schneiden die Tangenten an die Kurven $y = f(x)$ die x -Achse unter einem Winkel von 45° bzw. 135° ?

$$y = x^2; \quad y = x^3; \quad y = \frac{x^2 - 3}{2x}; \quad y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2}$$

Aufgabe 6:

Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ an die Kurve $y = f(x)$ mit der x -Achse?

$$y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1; \quad y = \sqrt[3]{x + 1}, \quad x_0 = 0; \quad y = x\sqrt{x + 1}, \quad x_0 = 3$$

Aufgabe 7:

Stellen Sie die Gleichungen $y = mx + n$ der Tangenten an $y = f(x)$ in den angegebenen Punkten auf:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad P_1(1, y_1) \text{ bzw. } P_2(-1, y_2); \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, \quad P_1(0, y_1) \text{ bzw. } P_2(2, y_2)$$

Aufgabe 8:

Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie deren Nullstellen:

$$y = x\sqrt{9x - x^2}; \quad y = x^2\sqrt{25 - x^2}; \quad y = \sqrt{\frac{x}{2 - x}}$$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) dx; \quad \int \frac{2}{x^3} dx; \quad \int \frac{1}{3} \sqrt[3]{x} dx$$

Aufgabe 10:

Berechnen Sie die folgenden Integrale indem Sie die Funktion unter dem Integral vereinfachen (Potenzgesetze):

$$\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx; \quad \int x\sqrt{x} dx; \quad \int \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$$

Aufgabe 11:

Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von den angegebenen Kurven und der x -Achse eingeschlossen werden:

$$y = \frac{1}{2}x^3, \quad x = -2, \quad x = 2; \quad y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad x = -2, \quad x = 2$$

$$y = \cos x \text{ zwischen zwei benachbarten Nullstellen}$$

Aufgabe 12:

Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den zwei gegebenen Kurven eingeschlossen wird:

$$y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x; \quad y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5$$