Übungen Grundlagen – Lösungen
Zusammenfassen und Vereinfachen und Binomische Formeln:
Lösung vom Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}(a+b-c)(a-b-c) &= a^2+ba-ca-ab-b^2+cb-ac-bc+c^2\\ &= a^2-2ac-b^2+c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-a)(a-1)-2(a+1)(a-2) &= a-a^2-1+a-2(a^2+a-2a-2)\\ &= a-a^2-1+a-2a^2-2a+4a+4\\ &= -3a^2+4a+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d) &= ac+bc-ad-bd-(ac-bc+ad-bd)\\ &= ac+bc-ad-bd-ac+bc-ad+bd\\ &= 2bc-2ad=2(bc-ad)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7a-[3a-(7+5b)]+[a-(4-6b)]-(2a+7b) &= 7a-[3a-7-5b]+[a-4+6b]-(2a+7b)\\ &= 7a-3a+7+5b+a-4+6b-2a-7b\\ &= 3a+4b+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3a+2b)(2a-3b)(5a-7b) &= (6a^2+4ba-9ab-6b^2)(5a-7b)\\ &= (6a^2-5ab-6b^2)(5a-7b)\\ &= 30a^2-25a^2b-30b^2a-42a^2b+35ab^2+42b^3\\ &= 30a^3-67a^2b+5ab^2+42b^3\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2 &= a^4+2a^2b^2+b^4-(a^4-2a^2b^2+b^4)\\ &= a^4+2a^2b^2+b^4-a^4+2a^2b^2-b^4\\ &= 4a^2b^2\end{aligned}$$

$$9a^4b^2+12a^2b+4 = (3a^2b+2)^2$$

$$(a+b+1)(a+b-1) = (a+b)^2-1$$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+b^2-4(a+b)+4 &= (a+b)^2-4(a+b)+4\\ &= (a+b-2)^2\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
a^2b^2+ab+ab+1 &= a^2b^2+2ab+1\\
&= (ab+1)^2=(ab+1)(ab+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4a^2+20ab+25b^2-a^2 &= (2a+5b)^2-a^2\\
&= (2a+5b+a)(2a+5b-a)\\
&= (3a+5b)(a+5b)
\end{aligned}$$

$$8(7a-5b)-5c(7a-5b) = (8-5c)(7a-5b)$$

$$\begin{aligned}
(-5a-3b)^2+(-5a+3b)^2 &= 25a^2+30ab+9b^2+25a^2-30ab+9b^2\\
&= 2(25a^2+9b^2)
\end{aligned}$$

Brüche Zusammenfassen und Vereinfachen:
Lösung vom Aufgabe 4:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x-1}} &= \frac{\frac{1-x+x+1}{(x+1)(1-x)}}{\frac{x-1+1+x}{(1+x)(x-1)}}=\frac{\frac{2}{(x+1)(1-x)}}{\frac{2x}{(1+x)(x-1)}}\\
&= \frac{2(1+x)(x-1)}{2x(x+1)(1-x)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{1-x}=-\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{5m^2n+7n}{3m-2n}\cdot\frac{4n^2-9m^2}{15mn^2+10n^3} &= \frac{n(5m^2+7)(2n+3m)(2n-3m)}{(3m-2n)\cdot 5n^2\cdot(3m+2n)}\\
&= -\frac{n(5m^2+7)}{5n^2}=-\frac{(5m^2+7)}{5n}
\end{aligned}$$

$$1-\frac{x}{1-\frac{x}{x+1}} = 1-\frac{x}{\frac{x+1-x}{x+1}}=1-\frac{x}{\frac{1}{x+1}}=1-x(x+1)$$

Lösung vom Aufgabe 5:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x} &= \frac{-5}{2x-2} && x\neq 1, x\neq 0\\
\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x} &= \frac{-5}{2}\cdot\frac{1}{x-1} && \mid\cdot x(x-1)\\
2x-6(x-1) &= \frac{-5}{2}x\\
-4x+6 &= \frac{-5}{2}x\\
6 &= \frac{3}{2}x\Rightarrow x=4
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 6:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\\
&= \frac{(a-1)(a+1)(a+2)-(a-2)(a+2)(a+1)+(a-2)(a+2)(a-1)-(a-1)(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+2)(a-1)(a+1)}\\
&= \frac{(a^2-1)(a+2)-(a^2-4)(a+1)+(a^2-4)(a-1)-(a^2-1)(a-2)}{(a^2-4)(a^2-1)}\\
&= \frac{(a^2-1)[(a+2)-(a-2)]+(a^2-4)[(a-1)-(a+1)]}{(a^2-4)(a^2-1)}\\
&= \frac{4(a^2-1)-2(a^2-4)}{(a^2-4)(a^2-1)}=\frac{4a^2-4-2a^2+8}{(a^2-4)(a^2-1)}=\frac{2a^2+4}{(a^2-4)(a^2-1)} \qquad a\neq\pm 1, a\neq\pm 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2\\
&= \frac{a(a+1)+a(a-1)}{(a-1)(a+1)}-2\\
&= \frac{a^2+a+a^2-a-2(a^2-1)}{a^2-1}\\
&= \frac{2a^2-2a^2+2}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1} \qquad a\neq\pm 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}\\
&= \frac{(a+1)(a-1)^2-(a-1)(a+1)^2+(a-1)^2-(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}\\
&= \frac{(a-1)^2[a+1+1]-(a+1)^2[a-1+1]}{(a+1)^2(a-1)^2}\\
&= \frac{(a-1)^2(a+2)-a(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}\\
&= \frac{(a-2a+1)(a+2)-a(a^2+2a+1)}{(a+1)^2(a-1)^2}\\
&= \frac{a^3-2a^2+a+2a^2-4a+2-a^3-2a^2-a}{(a+1)^2(a-1)^2}=\frac{-2a^2-4a+2}{(a+1)^2(a-1)^2} \qquad a\neq\pm 1
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 7:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\
\frac{1}{B} &= \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{ab}{a+b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{b^3-a^3}{a^3b^3}}{\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}} = \frac{(b^3-a^3)a^2b^2}{(b^2+ab+a^2)a^3b^3}\\
&= \frac{b^3-a^3}{(b^2+ab+a^2)ab} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(b^2+ab+a^2)ab} = \frac{b-a}{ab}\\
\frac{1}{B} &= \frac{ab}{b-a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}} = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{(a+b)^2-(a-b)^2}\\
&= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2} = \frac{2ab}{4ab} = \frac{1}{2}\\
\frac{1}{B} &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}} = \frac{\frac{a(1-ab)+1}{1-ab}}{\frac{1-ab-1}{1-ab}} = \frac{a(1-ab)+1}{1-ab-1} = \frac{a-a^2b+1}{-ab} = \frac{a^2b-a-1}{ab}\\
\frac{1}{B} &= \frac{ab}{a^2b-a-1}
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 8:

$$\begin{aligned}
\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)} &= \frac{a^2-2a^2b^2+b^4-a^4-2a^2b^2-b^4}{ab(a+b)} = \frac{-4a^2b^2}{ab(a+b)} = \frac{-4ab}{a+b}\\
\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}} &= \frac{b\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)}{a+\frac{1}{2}} = b-\frac{1}{2}\\
\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a} &= \frac{x\left(a+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{y}\left(a+\frac{1}{b}\right)}{a+\frac{1}{b}} = x-\frac{1}{y}\\
\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3} &= \frac{5(16-8ab+a^2b^2)(4-ab)}{64\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3} = \frac{5(4-ab)^2(4-ab)}{64\left(\frac{ab-4}{4}\right)^3}\\
&= \frac{5(4-ab)^3}{\frac{64}{64}(ab-4)^3} = \frac{5\cdot(-1)^3(ab-4)^3}{(ab-4)^3} = -5
\end{aligned}$$

Potenzen und Wurzeln:
Lösung vom Aufgabe 9:

$$\begin{aligned}
a^4b^4 &= (ab)^4 \\
a^{29}/b^{29} = \frac{a^{29}}{b^{29}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{29} \\
a\sqrt{a} &= a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \\
b^2 \cdot \sqrt[3]{b} &= b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{7}{3}} \\
\sqrt{a^3} &= a^{\frac{3}{2}} \\
\sqrt[3]{a^5} &= a^{\frac{5}{3}} \\
(\sqrt[3]{a})^5 &= a^{\frac{5}{3}} \\
\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{15}+\frac{3}{15}} = a^{\frac{8}{15}}
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 10:

$$\begin{aligned}
b\sqrt{b} &= \sqrt{b^3} \\
b \cdot \sqrt[3]{b^2} &= \sqrt[3]{b^3 \cdot b^2} = \sqrt[3]{b^5} \\
x^2 \cdot \sqrt[4]{x} &= \sqrt[4]{x^8 \cdot x} = \sqrt[4]{x^9} \\
\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} &= \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6 \\
\sqrt[k]{a^3} \cdot \sqrt[k]{b^7} &= \sqrt[k]{a^3 \cdot b^7} \\
\sqrt{\sqrt{x}} &= \sqrt[4]{x} \\
\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} &= \sqrt[8]{x}
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 11:

$$\begin{aligned}
(x+\sqrt{x})^2 &= = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 = x^2 + 2x\sqrt{x} + x \\
(\sqrt[4]{x})^2 &= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \\
(x^2 - \sqrt[3]{x})^2 &= x^2 - 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}} = x^4 - 2x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \\
(\sqrt{a+b})^2 &= a + b \\
(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b = a + 2\sqrt{ab} + b
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 12:
Achtung: $a, b, x, y > 0$, sonst müssen Beträge benutzt werden:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4a^2b^3} &= 2ab^{\frac{2}{3}} = 2ab\sqrt{b} \\
\sqrt[4]{x^2y^4} &= \sqrt{x} \cdot y \\
\sqrt{a^2+b^2} &= \text{? geht nicht einfacher} \\
\sqrt{a^2+2ab+b^2} &= \sqrt{(a+b)^2} = a + b
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 13:

$$\begin{aligned}
4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} &= 8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2 = 4 \\
120^{\frac{1}{2}} \cdot 900^{\frac{1}{4}} &= (3 \cdot 4 \cdot 10)^{\frac{1}{2}} \cdot (9 \cdot 100)^{\frac{1}{4}} = 2(3 \cdot 10)^{\frac{1}{2}} \cdot (3 \cdot 10)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60 \\
\sqrt{0,16} &= \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10} = 0,4 \\
\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(\frac{7}{4}\right)^2 : \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 7^2} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} \\
\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{4^2 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 4^3} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 14:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^6(2y)^{12}} &= x^2 \cdot (2y)^4 = 16x^2y^4 \\
\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y}} &= \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{6}} \\
\sqrt{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y}} &= x^{\frac{1}{8}} \cdot y^{\frac{1}{6}} \\
\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} &= \frac{(25x^3y^{-6})^2}{(15x^2y^{-3})^4} = \frac{25^2 \cdot x^6 \cdot y^{-12}}{15^4 \cdot x^8 \cdot y^{-12}} = \frac{5^4 \cdot x^6}{3^4 \cdot 5^4 \cdot x^8} = \frac{1}{81x^2} \\
\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}} &= \frac{a^{n-1}(a+2)}{a^{n-3}(a+2)} = \frac{a^{n-1}}{a^{n-3}} = a^2
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 15:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}x^{-1} - 3x\right)\left(3x^{-1} - \frac{2}{3}x\right) &= \left(\frac{2}{3x} - 3x\right)\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{x^2} - 9 - \frac{4}{9} + 2x^2 = \frac{2}{x^2} - \frac{85}{9} + 2x^2 \\
x^{3m-1}x^{m+1} &= x^{3m-1+m+1} = x^{4m} \\
\frac{\sqrt[7]{x \cdot \sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[7]{x}}} &= \frac{x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{\frac{1}{28}}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{28}}} = \frac{x^{\frac{1}{7}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{7}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{3}{28}}
\end{aligned}$$

Prozentrechnung:
Lösung vom Aufgabe 16:
Es sei P der Preis ohne Mehrwertsteuer.

$$1,19P = 29{,}00\,€ \Rightarrow P = \frac{29{,}00\,€}{1,19} = 24{,}37\,€ \Rightarrow \text{Mwst} = 29{,}00\,€ - 24{,}37\,€ = 4{,}63\,€$$

Lösung vom Aufgabe 17:

$$\begin{aligned} G_0 &= 1000 \\ G_1 &= 1,01 \cdot 1000 \\ G_2 &= 1,02 \cdot G_1 = 1,02 \cdot 1,01 \cdot 1000 \\ G_3 &= 1,025 \cdot G_2 = 1,025 \cdot 1,02 \cdot 1,01 \cdot 1000 = 1055,96 \end{aligned}$$

Auf dem Konto sind also 1055,96 €.

Lösung vom Aufgabe 18:
45 von 135 habe bestanden, d.h. 90 sind durchgefallen: Durchfallquote: $\frac{90}{135} \cdot 100\% = 66,66\%$. 60 haben am Vorkurs teilgenommen, davon haben 45 bestanden, also sind 15 durchgefallen. Durchfallquote: $\frac{15}{60} \cdot 100\% = 25\%$.

Lösung vom Aufgabe 19:
0,5 Promille sind $\frac{0{,}5}{1000} = \frac{5}{10.000}$, d.h. 0,5 Promille von 6 l sind $\frac{5}{10.000} \cdot 6\,\mathrm{l} = \frac{3}{1.000}\,\mathrm{l} = 3\,\mathrm{ml}$.

Lösung vom Aufgabe 20:
Preis alt: p_a, Preis neu: p_n.

$$p_n = 1,1p_a \Rightarrow p_a = \frac{1}{1,1}p_n = 0,91p_n$$

D.h. der Kaffee war 9% billiger.

Lösung vom Aufgabe 21:
$15.000 * x = 16.875 \Rightarrow x = 1,125$. D.h. der Zinssatz betrug 12,5%.

Lösung vom Aufgabe 22:

Originalpreis	zu zahlen P
Nachlass 10%	zu zahlen $0,9 \cdot P$
Sonderrabatt 8%	zu zahlen $0,92 \cdot 0,9 \cdot P$
Skonto 3%	zu zahlen $0,97 \cdot 0,92 \cdot 0,9 \cdot P = 0,80 \cdot P$

Insgesamt ergibt sich also eine Preisreduktion um ca. 20%.

Lösung vom Aufgabe 23:

$$\begin{aligned} (1,03)^n \cdot p &= 2p \Rightarrow n \cdot \ln(1,03) = \ln 2 \Rightarrow n = 23,5 \\ (1,05)^n \cdot p &= 2p \Rightarrow n \cdot \ln(1,05) = \ln 2 \Rightarrow n = 14,2 \\ (1,10)^n \cdot p &= 2p \Rightarrow n \cdot \ln(1,10) = \ln 2 \Rightarrow n = 7,3 \end{aligned}$$

Summenzeichen:
Lösung vom Aufgabe 24:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-3}^{2} 2^{k+1} &= 2^{-2}+2^{-1}+2^{0}+2^{1}+2^{2}+2^{3}\\
\sum_{i=1}^{10}(-1)^{i+1}\cdot i^2 &= 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2\\
\sum_{k=2}^{11}(-1)^k(k-1)^2 &= 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2\\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} a_{ij} &= a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{32}+a_{33}+a_{34}
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 25:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-3}^{3} i^2 &= (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2=28\\
\sum_{k=0}^{7} 5 &= \underbrace{5}_{k=0}+\underbrace{5}_{k=1}+\underbrace{5}_{k=2}+\ldots+\underbrace{5}_{k=7}=8\cdot 5=40\\
\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=2}^{3} k^2\cdot(j-1) &= 1^2\cdot 1+1^2\cdot 2+2^2\cdot 1+2^2\cdot 2+3^2\cdot 1+3^2\cdot 2\\
&= 1\ +\ 2\ +\ 4\ +\ 8\ +\ 9\ +\ 18=42\\
\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-2i}^{i} i^2\cdot j &= (-1)^2\underbrace{\sum_{j=2}^{-1} j}_{=0}+0^2\underbrace{\sum_{j=0}^{0} j}_{=0}+1^2\sum_{j=-2}^{1} j\\
&= -2\ -\ 1\ +\ 0\ +\ 1\ =\ -2
\end{aligned}$$

Lösung vom Aufgabe 26:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 2+4+6+8+10+12=\sum_{k=1}^{6} 2k\\
s_2 &= 1+3+5+7+9=\sum_{k=0}^{4}(2k+1)\\
s_3 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{20}{2^{20}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2^k}\\
s_4 &= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\
s_5 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n-1}=\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}
\end{aligned}$$