Übungen Logarithmen – Lösungen

Lösung von Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
\log_7 49 &= 2, \qquad \text{da } 7^2 = 49 \\
\log_3 1 &= 0, \qquad \text{da } 3^0 = 1 \\
\log_5 \sqrt[6]{25} &= \log_5 25^{\frac{1}{6}} = \log_5 5^{\frac{2}{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
\log_{0.5} \frac{1}{32} &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5, \qquad \text{da } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 2:

Für alle Aufgaben muss gelten: $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\log_x 8 = 3 &\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\
\log_x 25 = 2 &\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \\
\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2} &\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \Rightarrow x = 10 \\
\log_{0.5} x = 4 &\Rightarrow x = (0,5)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \\
\log_2 x = 6 &\Rightarrow x = 2^6 = 64
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}} = \sqrt{\sqrt{10}^{\log_{10} 16}} = \sqrt{10^{\frac{1}{2}\log_{10} 16}} = \sqrt{10^{\log_{10} 16^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{10^{\log_{10} 4}} = \sqrt{4} = 2 \\
x &= \left[\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right]^{\ln 8} = \left[\sqrt[3]{e}\right]^{2\ln 8} = \left[\sqrt[3]{e}\right]^{\ln 64} = e^{\frac{1}{3}\ln 64} = e^{\ln 64^{\frac{1}{3}}} = e^{\ln 4} = 4 \\
x &= \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2 + \lg 32)}} = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}\lg(2\cdot 32)}} = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}\lg 64}} = \sqrt[3]{10^{\lg 8}} = \sqrt[3]{8} = 2 \\
x &= \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(100^{\lg 7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10^{2\lg 7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10^{\frac{1}{2}\cdot 2\lg 7}\right) = 10^{\lg 7} = 7 \\
x &= \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2 = \lg \frac{10}{2} \cdot \lg(2\cdot 10) + (\lg 2)^2 \\
&= (\lg 10 - \lg 2)(\lg 2 + \lg 10) + (\lg 2)^2 = (\lg 10)^2 - (\lg 2)^2 + (\lg 2)^2 = (\lg 10)^2 = 1^2 = 1
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4:

$$e^{0.5(\ln x)^2} = \left(e^{(\ln x)^2}\right)^{0.5} \neq e^{(\ln x)^{2\cdot 0.5}} = e^{\ln x} = x$$

Lösung von Aufgabe 5:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ae^{ct} &= ae^{c(t+3)} \\
\frac{1}{2}e^{ct} &= e^{c(t+3)} = e^{ct}\cdot e^{3c} \\
\frac{1}{2} &= e^{3c} \Rightarrow 3c = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow c = -0,23
\end{aligned}$$

Die Einheit von c wäre $1/\mathrm{h}$, da der Exponent einheitslos ist.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ae^{ct} &= ae^{c(t+2)}\\
\frac{1}{2}e^{ct} &= e^{c(t+2)} = e^{ct}\cdot e^{2c}\\
\frac{1}{2} &= e^{2c}\\
y(t+6) &= ae^{c(t+6)} = e^{ct}\cdot e^{6c} = y(t)\cdot e^{6c} = y(t)\cdot\left(e^{2c}\right)^3 = y(t)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}y(t)
\end{aligned}$$

D.h. der Nikotingehalt sinkt auf ein Achtel.

Übungen Winkelfunktionen–Lösungen

Lösung von Aufgabe 6:

x	$\sin\alpha = x$	$\cos\alpha = x$	$\tan\alpha = x$
$0,8290$	$\alpha = 56°$	$\alpha = 34°$	$\alpha = 39,7°$
$-0,2907$	$\alpha = -16,9°$	$\alpha = 106,9°$	$\alpha = -16,2°$
$-2,145$	keine Lsg.	keine Lsg.	$\alpha = -65°$
$0,8660$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 40,9°$

Lösung von Aufgabe 7:

$$\begin{aligned}
a &= 50\text{cm},\quad b = 78,17\text{cm}\\
c &= \sqrt{a^2+b^2} = 92,73\text{cm}\\
\alpha &= \arcsin\frac{a}{c} = 32,63°\\
\beta &= \arcsin\frac{b}{c} = 57,37°
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 40\text{cm},\quad \alpha = 46°\\
\beta &= 180° - \alpha - \gamma = 44°\\
c &= \frac{a}{\sin\alpha} = 55,61\text{cm}\\
b &= c\cdot\sin\beta = 38,63\text{cm}\\
b &= 70\text{cm},\quad \alpha = 18°\\
\beta &= 180° - \alpha - \gamma = 72°\\
c &= \frac{b}{\sin\beta} = 73,60\text{cm}\\
a &= c\cdot\sin\alpha = 22,74\text{cm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= 65\text{cm},\quad \beta = 59°\\
\alpha &= 180° - \beta - \gamma = 31°\\
b &= c\cdot\sin\beta = 55,72\text{cm}\\
a &= a\cdot\sin\alpha = 33,48\text{cm}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 8:

$$y = \sin(2x+5) \quad \Rightarrow \quad \text{Periode } p = \frac{2\pi}{2} = \pi = 180^\circ$$
$$y = \cos(4x-1) \quad \Rightarrow \quad \text{Periode } p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$
$$y = \tan\left(\frac{x}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Periode } p = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi = 720^\circ$$

Lösung von Aufgabe 9:
Sei $k \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{8}\right)\pi$$
$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff 4x + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k}{4}\pi$$
$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$$

Lösung von Aufgabe 10:
Gesucht sind die Lösungen der Gleichungen für $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$:

$$\sin\alpha = \cos\alpha \iff \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \iff \alpha = 45^\circ, \alpha = 225^\circ$$
$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \iff \tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 \iff \tan\alpha = \pm 1$$
$$\iff \alpha = 45^\circ, \alpha = 135^\circ, \alpha = 225^\circ, \alpha = 315^\circ$$