Übungen Vektorrechnung – Lösungen

Lösung von Aufgabe 1:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad 2\vec{a}+3\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} P(3;1),\ Q(2,-1) \quad &\Rightarrow \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ P(4,4),\ Q(7;1) \quad &\Rightarrow \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 3:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \qquad \|\vec{b}\| = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \|\vec{c}\| = \sqrt{100+0} = 10$$

Lösung von Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{3+8}{\sqrt{5}\cdot 5} \Rightarrow \varphi = 10,3^\circ \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-2+6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}} \Rightarrow \varphi = 63,4^\circ \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-12+12}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 5:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 20\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2 = 18\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} \cos 120^\circ \\ \sin 120^\circ \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_3 = 15\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} \cos(-15^\circ) \\ \sin(-15^\circ) \end{pmatrix} \\ \vec{F} &= \begin{pmatrix} 20\cos 45^\circ + 18\cos 120^\circ + 15\cos(-15^\circ) \\ 20\sin 45^\circ + 18\sin 120^\circ + 15\sin(-15^\circ) \end{pmatrix}\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 19.63 \\ 25.85 \end{pmatrix}\mathrm{N} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{2\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71,6^\circ \\ \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{2}{2\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \beta = 71,6^\circ \\ \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{-1+9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \gamma = 36,8^\circ \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 7: Gerade:

$$G = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+3t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
4 &= 1 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{2} \\
6 &= 1 + 3t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5}{3} \Rightarrow R_1 \text{ liegt nicht auf } G
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5 &= 1 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = 2 \\
7 &= 1 + 3t \quad \Rightarrow \quad t = 2 \Rightarrow R_2 \text{ liegt auf } G
\end{aligned}
$$

Lösung von Aufgabe 8:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix} \quad t_1 \in \mathbb{R} \right\} \\
G_2 &= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6t_2 \\ 1 + 10t_2 \end{pmatrix} \quad t_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
\text{Schnittpunkt: } 2t_1 &= 1 + 6t_2 \quad (I) \\
3t_1 &= 1 + 10t_2 \quad (II) \\
(II - I) t_1 &= 4t_2 \\
8t_2 = 1 + 6t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_1 = 2 & \\
\text{Schnittpunkt:} \quad & \quad S(4,6) \\
\text{Schnittwinkel: } \cos\varphi &= \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 10}{\sqrt{2^{+}3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 10^2}} \Rightarrow \varphi = 2,7^\circ
\end{aligned}
$$

Lösung von Aufgabe 9:

a)

$$
\begin{aligned}
(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 &= r^2 \\
\text{Mittelpunkt } (-1,-2) &\Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = r^2 \\
(0,0) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (0+1)^2 + (0+2)^2 = 5 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5} \\
(x+1)^2 + (y+2)^2 &= 5
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
(x-x_M)^2+(y-y_M)^2 &= r^2 \\
(3,0) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (3-x_M)^2+(0-y_M)^2=(3-x_M)^2+y_M^2=r^2 \\
& 9-6x_M+x_M^2+y_M^2=r^2 \quad (I) \\
(5,\sqrt{5}-3) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (5-x_M)^2+(\sqrt{5}-3-y_M)^2=r^2 \\
& 25-10x_M+x_M^2+(\sqrt{5}-3)^2-2(\sqrt{5}-3)y_M+y_M^2=r^2 \quad (II) \\
(\sqrt{5}+3,-1) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (\sqrt{5}+3-x_M)^2+(-1-y_M)^2=r^2 \\
& (\sqrt{5}+3)^2+2(\sqrt{5}-3)x_M+x_M^2+1+2y_M+y_M^2=r^2 \quad (III)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
II-I \quad & 16-4x_M+(\sqrt{5}-3)^2-2(\sqrt{5}-3)y_M=0 \\
& 16-4x_M+5-6\sqrt{5}+9-2(\sqrt{5}-3)y_M=0 \\
& 30-4x_M-6\sqrt{5}-2(\sqrt{5}-3)y_M=0 \\
& 15-2x_M-3\sqrt{5}-(\sqrt{5}-3)y_M=0 \quad (II')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
III-I \quad & (\sqrt{5}+3)^2-9-2(\sqrt{5}+3)x_M+6x_M+1+2y_M=0 \\
& 5+6\sqrt{5}+9-9-2\sqrt{5}x_M-6x_M+6x_M+1+2y_M=0 \\
& 6+6\sqrt{5}-2\sqrt{5}x_M+2y_M=0 \\
y_M &= \sqrt{5}x_M-3\sqrt{5}-3 \\
\text{in } (II') \quad & 15-2x_M-3\sqrt{5}-(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}x_M-3\sqrt{5}-3)=0 \\
& 15-2x_M-3\sqrt{5}-5x_M+3\sqrt{5}x_M+15-9\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9=0 \\
& 21-7x_M+3\sqrt{5}x_M-9\sqrt{5}=0 \\
x_M(3\sqrt{5}-7) &= 9\sqrt{5}-21 \\
x_M &= \frac{9\sqrt{5}-21}{3\sqrt{5}-7}=3 \\
y_M &= \sqrt{5}x_M-3\sqrt{5}-3=\sqrt{5}\cdot 3-3\sqrt{5}-3=-3 \\
r^2 &= (3-x_M)^2+y_M^2=(3-3)^2+(-3)^2=9 \Rightarrow r=3 \\
(x-3)^2+(y+3)^2 &= 9
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
(x-x_M)^2+(y-y_M)^2 &= 36 \\
(-1,11) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (-1-x_M)^2+(11-y_M)^2=36 \\
& \quad 1+2x_M+x_M^2+121-22y_M+y_M^2=36 \\
& \quad 122+2x_M+x_M^2-22y_M+y_M^2=36 \quad (I) \\
(5,5) \text{ auf Kreis} &\Rightarrow (5-x_M)^2+(5-y_M)^2=36 \\
& \quad 25-10x_M+x_M^2+25-10y_M+y_M^2=36 \\
& \quad 50-10x_M+x_M^2-10y_M+y_M^2=36 \quad (II) \\
I-II & \quad 72+12x_M-12y_M=0 \\
y_M &= 6+x_M \\
\text{in } (II) & \quad 50-10x_M+x_M^2-10(6+x_M)+(6+x_M)^2=36 \\
& \quad 50-10x_M+x_M^2-60-10x_M+36+12x_M+x_M^2=36 \\
& \quad -10-8x_M+2x_M^2=0 \\
& \quad x_M^2-4x_M-5=0 \\
x_{M_{1/2}} &= 2\pm\sqrt{9} \Rightarrow x_{M_1}=5, y_{M_1}=11, x_{M_2}=-1, y_{M_2}=5 \\
\text{2 Kreise:} & \quad (x-5)^2+(y-11)^2=36 \\
& \quad (x+1)^2+(y-5)^2=36
\end{aligned}
$$

Lösung von Aufgabe 10:

$$
3x+4y=25 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{25-4y}{3}
$$

$$
x^2+y^2=25 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{25-4y}{3}\right)^2+y^2=25
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{25-4y}{3}\right)^2+y^2 &= \frac{625-200y+16y^2}{9}+y^2=25 \\
625-200y+16y^2+9y^2 &= 225 \\
400-200y+25y^2 &= 0 \\
16-8y+y^2 &= 0 \Rightarrow y_{1/2}=4\pm\sqrt{16-16}=4 \\
x &= \frac{25-16}{3}=3
\end{aligned}
$$

Die Gerade ist eine Tangente, die den Kreis in (3,4) berührt.

Lösung von Aufgabe 11:

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x + y^2 &= 0 \\
y = 2x + 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 8x + (2x+1)^2 = 0 \\
& \quad x^2 - 8x + 4x^2 + 4x + 1 = 0 \\
& \quad 5x^2 - 4x + 1 = 0 \\
x_{1/2} &= \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{5}{25}} \\
& \text{ keine Lösung–Gerade berührt Kreis nicht (Passante)} \\
y = 4 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 8x + 4^2 = 0 \\
& \quad x^2 - 8x + 16 = 0 \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4 \text{ doppelte Lösung–Gerade ist Tangente} \\
y = x \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 8x + x^2 = 0 \\
& \quad 2x^2 - 8x = 2x(x-4) = 0 \\
x_1 &= 0, x_2 = 4 \text{ zwei Lösungen–Gerade schneidet Kreis (Sekante)}
\end{aligned}$$