

Literaturempfehlungen

- M. Ruhrländer; Brückenkurs Mathematik; Pearson; 2016
- W. Schäfer, K. Georg, G. Trippler; Mathematik–Vorkurs: Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger; Teubner; 1999
- P. Stingl; Einstieg in die Mathematik für Fachhochschulen; Hanser; 2002
- G. Walz, F. Zeilfelder, Th. Rießinger; Brückenkurs Mathematik für Studieneinsteiger aller Disziplinen; Elsevier; 2005
- E. Hohloch, G. Kurz, H. Kümmerer; Brücken zur Mathematik Band 1– Grundlagen; Cornelsen; 2006
- M. Knorrenschild; Vorkurs Mathematik – Ein Übungsbuch für Fachhochschulen; Fachbuchverlag Leipzig; 2004
- A. Kemnitz; Mathematik zum Studienbeginn; Vieweg-Teubner; 2009

Andere (ältere und neuere) Auflagen sind auch o.k. Online Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	2
1.1 Elementare Rechengesetze:	2
1.2 Brüche	2
1.3 Binomische Formeln	3
1.4 Potenzen und Wurzeln	3
1.5 Prozentrechnung	5
1.6 Summenzeichen	5
2 Gleichungen und Ungleichungen	6
2.1 Quadratische Gleichungen	7
2.2 Gleichungen höherer Ordnung und Polynomdivision	8
2.3 Gleichungen mit Wurzeln	8
2.4 Ungleichungen	9
3 Exponentialfunktion und Logarithmen	11
3.1 Exponentialfunktion	11
3.2 Logarithmen	12
4 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)	14
4.1 Winkelfunktionen im Dreieck	14
4.2 Bogenmaß	14
4.3 Winkelfunktionen am Kreis	14
4.4 Umkehrfunktionen–Arkusfunktionen	16
4.5 Bedienung Taschenrechner	18
5 Funktionen	18
5.1 Allgemeines	18
5.2 Differenzieren	21
5.3 Integrieren	23

6	Vektorrechnung	24
6.1	Definitionen und einfache Rechenregeln	24
6.2	Koordinatendarstellung eines Vektors	25
6.3	Skalarprodukt	26
6.4	Geradengleichungen	26
6.5	Kreisgleichung	27

1 Grundlagen

1.1 Elementare Rechengesetze:

$$\begin{aligned}
 a + b &= b + a && \text{(Kommutativgesetz)} \\
 (a + b) + c &= a + (b + c) = a + b + c && \text{(Assoziativgesetz)} \\
 a(b + c) &= ab + ac && \text{(Distributivgesetz)}
 \end{aligned}$$

Das bedeutet u.a.

$$\begin{aligned}
 a - b &= -(b - a) && \text{Vertauschen der Reihenfolge ändert das Vorzeichen einer Differenz} \\
 (-a) \cdot b &= a \cdot (-b) = -a \cdot b \\
 (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt: Punktrechnung vor Strichrechnung; zwei Operationszeichen nacheinander sind sinnlos.

Im Ausdruck

$$a \cdot -1 \quad \text{(Unsinn)}$$

sind Klammern notwendig.

$$a \cdot (-1) = -a \quad \text{(Richtig)}$$

1.2 Brüche

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{q} &= \frac{a \cdot p}{a \cdot q} && \text{(Erweitern)} \\
 \frac{a \cdot p}{a \cdot q} &= \frac{p}{q} && \text{(Kürzen)} \\
 \frac{a \cdot p + a \cdot r}{a \cdot q} &= \frac{a \cdot (p + r)}{a \cdot q} = \frac{p + r}{q} && \text{aber } \frac{a \cdot p + r}{a \cdot q} \neq \frac{p + r}{q}
 \end{aligned}$$

Folgerungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{a - x}{b - y} &= \frac{(-1)(x - a)}{(-1)(y - b)} = \frac{x - a}{y - b} \\
 \frac{a - x}{x - a} &= \frac{(-1)(x - a)}{x - a} = -1
 \end{aligned}$$

Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren:

$$\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q} = \frac{p_1 + p_2}{q}$$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \quad (\text{geht immer, aber große Zahlen})$$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot \frac{kgV}{q_1} + p_2 \cdot \frac{kgV}{q_2}}{kgV} \quad (\text{kgV-kleinstes gemeinsames Vielfaches – eleganter})$$

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_2 \cdot q_1}$$

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{q}$$

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Das bedeutet insbesondere:

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} \neq \frac{1}{2} \quad \text{denn: } \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{aber } \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0,166$$

1.3 Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Anwendung: Rational machen des Nenners

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Unter der n -ten Potenz einer beliebigen reellen Zahl a versteht man das n -fache Produkt von a mit sich selbst.

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}}$$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}, n > 0$ der Exponent und a die Basis.

Für $n = 0$ gilt $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$.

Achtung: 0^0 ist ein sogenannter unbestimmter Ausdruck.

Einfache Rechenregeln und Potenzgesetze

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad (b \neq 0)$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Achtung: Im Ausdruck $(a^n)^m$ sind die Klammern zwingend. Liest man a^{n^m} so ist damit $a^{n^m} = a^{(n^m)}$ gemeint. Z.B. gilt $2^{x^2} \neq (2^x)^2$.

$$x = 3 \Rightarrow 2^{x^2} = 2^{3^2} = 2^9 = 512 \quad \text{aber} \quad (2^x)^2 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$

Negative Exponenten:

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}; a \neq 0$$

Wurzeln:

Die n -te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist diejenige nichtnegative Zahl b , für die gilt: $b^n = a$. Man schreibt: $b = \sqrt[n]{a}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ und $a, b \geq 0$.

- Für gerade Zahlen $n = 2, 4, 6, \dots$ ist die Forderung $a, b \geq 0$ zwingend, da sonst die Wurzel nicht existiert ($a < 0$) oder mehrdeutig wäre ($b < 0$).
- Für ungerade $n = 1, 3, 5, \dots$ kann man auf diese Forderung verzichten, da z.B. die Gleichung $b^3 = a$ stets eine Lösung hat.
Allerdings kann es dann zu Problemen bei der Anwendung der Potenz- bzw. Wurzelgesetze kommen.

$$-2 = \sqrt[3]{-8} \quad \text{aber} \quad (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 2 \quad \text{????}$$

- \sqrt{a} ist für positive a stets eindeutig definiert. Daher gilt auch $\sqrt{4} = 2$ und nicht ± 2 . Das ist nicht zu verwechseln mit den Lösungen der Gleichung $x^2 = 4$. Diese sind $x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Dafür benötigt man gerade das \pm vor der Wurzel.
- Im Allgemeinen ist der Schluss $\sqrt{a^2} = a$ falsch. Das funktioniert nur für positive Zahlen a . Allgemein gilt

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Schreibweise als Potenz:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Beispiele zum effizienten Rechnen:

$$4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = ?? \text{ große Zahlen} \quad \text{aber auch eleganter} \quad 4^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32$$

Weitere Regeln:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} &= a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \end{aligned}$$

1.5 Prozentrechnung

- 1% von einer Größe x : $\frac{1}{100}x$
- p % von einer Größe x : $\frac{p}{100}x$
- Wie viel Prozent p sind a von x ? $\frac{a}{x} = \frac{p}{100} \Rightarrow p = \frac{a \cdot 100}{x}$
- x wird um p % kleiner: $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$
- x wird um p % größer: $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

1.6 Summenzeichen

Das Summenzeichen ist nur eine Abkürzung für Summen mit einer großen bzw. unbestimmten Anzahl von Summanden:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} a_i &:= a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} \text{ bzw.} \\ \sum_{i=1}^n a_i &:= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \text{ bzw.} \\ \sum_{i=k}^n a_i &:= a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n\end{aligned}$$

Der Index i ist der sogenannte Summationsindex, hier könnte jeder Buchstabe stehen, der nicht schon für die Grenzen verbraucht ist. D.h.

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{j=1}^{10} a_j \quad \text{usw.}$$

Unter dem Summenzeichen steht der Startindex und oben steht der letzte Index. Zur Berechnung werden für den Summationsindex alle ganzen Zahlen zwischen unterer und oberer Grenze eingesetzt.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 i &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ \sum_{i=2}^7 i^2 &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 \\ \sum_{i=0}^4 (2i + 1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \quad \text{Achtung: Klammern sind notwendig, denn ohne:} \\ \sum_{i=0}^4 2i + 1 &= \left(\sum_{i=0}^4 2i\right) + 1 = (0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 1\end{aligned}$$

Indexverschiebungen:

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k+a}^{n+a} a_{i-a} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k-a}^{n-a} a_{i+a}$$

Beispiele:

$$\sum_{i=1}^5 (i-2) = (1-2) + (2-2) + (3-2) + (4-2) + (5-2) = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = \sum_{i=-1}^3 i$$

$$\sum_{i=0}^5 (i+2)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \sum_{i=2}^7 i^2$$

Konstanten:

$$\sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-Summanden}} = n \quad \text{allgemein: } \sum_{i=k}^n 1 = n - k + 1$$

Rechenregeln:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n (c \cdot a_i + d) = c \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n d = c \sum_{i=1}^n a_i + n \cdot d$$

Beispiel:

$$\sum_{i=0}^4 (2i + 1) = 2 \sum_{i=0}^4 i + \sum_{i=0}^4 1 = 2 \sum_{i=0}^4 i + 5$$

Summen von Summen – geschachtelte Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} := \sum_{j=1}^m a_{1j} + \sum_{j=1}^m a_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^m a_{nj}$$

$$= a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1m} + a_{21} + \dots + a_{2m} + \dots + a_{nm}$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^4 i \cdot j^2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2$$

Grenze hängt vom Index ab:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{i+1} a_{ij} = (a_{11} + a_{12}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})$$

Die Grenzen der inneren Summe dürfen vom äußeren Summationsindex abhängig sein, aber nicht umgekehrt.

2 Gleichungen und Ungleichungen

Umformung von Gleichungen:

Die folgenden Umformungen einer Gleichung ändern nicht deren Lösungsmenge und werden erlaubte (äquivalente) Umformungen genannt:

- Addition und Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplikation beider Seiten mit derselben von null verschiedenen Zahl

Achtung: Quadrieren ist keine äquivalente Umformung, d.h. kann die Lösungsmenge verändern.

2.1 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Normalform:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \text{quad. Ergänzung} \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow & x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Für die Studenten aus Bayern:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Satz von Vieta – Zerlegung in Linearfaktoren:

Hat ein Polynom zweiten Grades $f(x) = ax^2 + bx + c$ zwei reelle Nullstellen x_1 und x_2 , so hat es die Darstellung:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ist das Polynom in der Form $f(x) = x^2 + px + q$ gegeben, so gilt:

$$f(x) = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Daraus ergibt sich der Satz von Vieta:

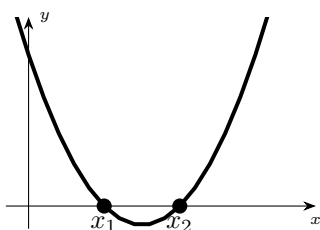
$$q = x_1 \cdot x_2 \quad p = -(x_1 + x_2)$$

Achtung: Funktioniert nur, wenn vor dem x^2 kein Faktor steht.

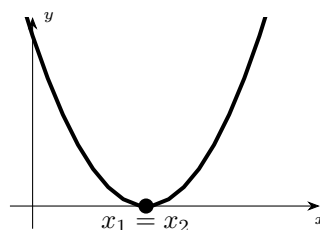
Der Satz von Vieta ist kein Lösungsverfahren, sondern erleichtert nur die Suche der Linearfaktoren, wenn beide Lösungen ganzzahlig sind.

Wenn $x_1 = x_2$ spricht man auch von einer Doppellösung bzw. einer doppelten Nullstelle.

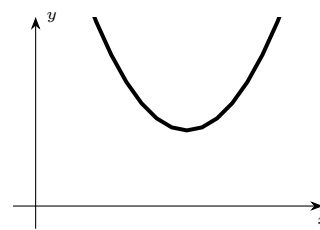
Zwei verschiedene reelle Lösungen



Eine doppelte reelle Lösung



Keine reelle Lösung

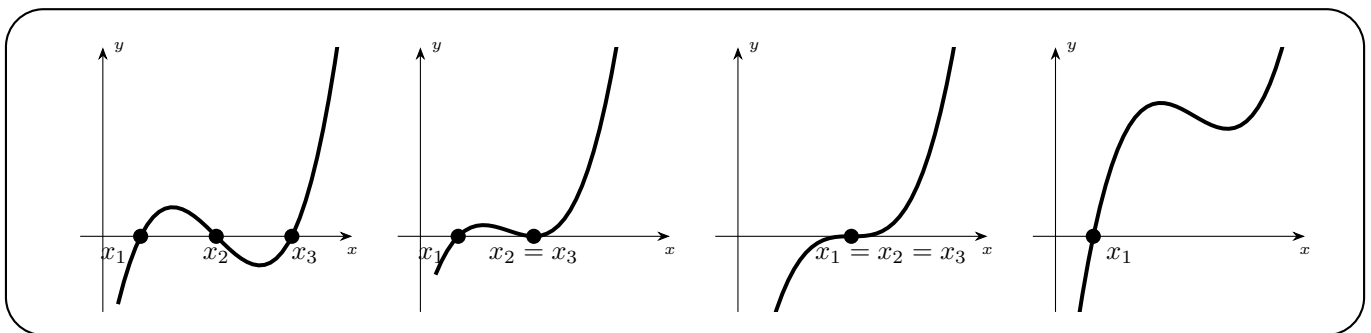


2.2 Gleichungen höherer Ordnung und Polynomdivision

Gleichungen 3. Grades: $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Für die Nullstellen einer Funktion 3. Grades gibt es folgende Fälle

- Drei verschiedene reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3 .
- Eine reelle Nullstelle x_1 und eine weitere davon verschiedene doppelte Nullstelle $x_2 = x_3$. Natürlich kann die einfache Nullstelle x_1 kleiner oder auch größer als die doppelte Nullstelle sein.
- Eine dreifache Nullstelle $x_1 = x_2 = x_3$.
- Nur eine reelle Nullstelle x_1 .



Ein Polynom 3. Grades hat also immer (mindestens) eine reelle Nullstelle und somit hat eine Gleichung 3. Grades immer (mindestens) eine Lösung. Diese kann man durch Lösungsformeln, Raten oder Näherungsverfahren bestimmen.

Ist $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, so gilt $a_0 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Das kann das Raten erleichtern. Wenn alle Lösungen ganze Zahlen sind, müssen diese Teiler von a_0 sein.

Hat man ein Lösung x_1 bestimmt, kann der Term $x - x_1$ ausgeklammert werden. Das Restpolynom wird durch Polynomdivision bestimmt.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ hat z.B. die Nullstelle $x_1 = 2$.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 -x^2 - 4x + 12 \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 -6x + 12 \\
 \underline{-6x + 12} \\
 0
 \end{array}$$

2.3 Gleichungen mit Wurzeln

Solche Gleichungen werden durch quadrieren in "normale" Gleichungen überführt. Dabei ist zu beachten

- Wird eine Summe / Differenz quadriert, so ist die binomische Formel zu benutzen
- Durch das Quadrieren kann sich die Lösungsmenge ändern, daher ist eine Probe erforderlich.

Beispiele:

$$7 + 3\sqrt{2x + 4} = 16$$

$$3\sqrt{2x + 4} = 9$$

$$\sqrt{2x + 4} = 3$$

$$2x + 4 = 9$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Probe: } 7 + 3\sqrt{2 \cdot \frac{5}{2} + 4} = 7 + 3 \cdot 3 = 16$$

$x = \frac{5}{2}$ ist tatsächlich eine Lösung.

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 = 2x - 1$$

$$x - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} + x - 1 = 2x - 1$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{x(x-1)} = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$\text{Probe: } \sqrt{0} - \sqrt{0-1} = \text{nicht definiert}$$

$$\sqrt{1} - \sqrt{1-1} = 1 = \sqrt{2 \cdot 1 - 1}$$

Nur $x = 1$ ist Lösung.

2.4 Ungleichungen

Die Lösung einer oder mehrerer Ungleichungen sind in der Regel Intervalle.

Schreibweisen für die wichtigsten Intervalle:

1. Endliche Intervalle ($a < b$)

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall})$$

$$[a, b) = [a, b[= \{x \mid a \leq x < b\} \quad (\text{halboffenes Intervall})$$

$$(a, b] =]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \quad (\text{halboffenes Intervall})$$

$$(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall})$$

2. Unendliche Intervalle

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, 0) = \mathbb{R}^- = \mathbb{R}_-$$

$$(0, \infty) = \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Rechenregeln

$$a < b \iff a \pm c < b \pm c$$
$$a < b \quad \text{und} \quad c > 0 \implies \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c \\ a : c < b : c \end{cases}$$
$$a < b \quad \text{und} \quad c < 0 \implies \begin{cases} a \cdot c > b \cdot c \\ a : c > b : c \end{cases}$$

Alle angegebenen Rechenregeln gelten in analoger Weise für Ungleichungen mit dem Relationszeichen \leq .

Produkt und Quotient zweier reeller Zahlen sind genau dann positiv, wenn beide Zahlen dasselbe Vorzeichen haben. Sie sind negativ, wenn beide Zahlen unterschiedliche Vorzeichen haben.

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot b > 0 \\ \frac{a}{b} > 0 \end{array} \right\} \iff (a > 0 \text{ und } b > 0) \quad \text{oder} \quad (a < 0 \text{ und } b < 0)$$
$$\left. \begin{array}{l} a \cdot b < 0 \\ \frac{a}{b} < 0 \end{array} \right\} \iff (a > 0 \text{ und } b < 0) \quad \text{oder} \quad (a < 0 \text{ und } b > 0)$$

Beispiele:

$$(x - 3)(x + 2) > 0$$
$$\iff x > 3 \quad \text{und} \quad x > -2 \quad \text{also: } x > 3$$
$$\text{oder } x < 3 \quad \text{und} \quad x < -2 \quad \text{also: } x < -2$$
$$L = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Hier ist eine graphische Darstellung auf der Zahlengerade hilfreich.

Multipliziert man eine Ungleichung mit einem Term, in dem eine Variable vorkommt, muss beachtet werden, dass der Term positive und negative Werte annehmen kann, sich somit eventuell das Relationszeichen umdreht. Das ist nur mit Hilfe einer Fallunterscheidung lösbar.

$$\frac{3x - 1}{2x + 4} < 2 \quad 2x + 4 \neq 0 \iff x \neq -2$$

1. Fall: $x > -2 \implies 3x - 1 < 2(2x + 4)$ da $2x + 4 > 0$

$$\iff 3x - 1 < 4x + 8 \iff -9 < x$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

2. Fall: $x < -2 \implies 3x - 1 > 2(2x + 4)$ da $2x + 4 < 0$

$$\iff 3x - 1 > 4x + 8 \iff -9 > x$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9) \cup (-2, \infty)$$

Quadratische Ungleichungen

$$\begin{aligned} & -2x^2 + 9x - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \\ x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0 & \Leftrightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 & \Leftrightarrow (x - 4) \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ & \Leftrightarrow x > 4 \quad \text{und} \quad x > \frac{1}{2} \quad \text{also: } x > 4 \\ & \text{oder } x < 4 \quad \text{und} \quad x < \frac{1}{2} \quad \text{also: } x < \frac{1}{2} \\ L = & \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty) \end{aligned}$$

So eine Ungleichung lässt sich auch anhand des Kurvenverlaufs der entsprechenden quadratischen Funktion lösen. So ist $f(x) = -2x^2 + 9x - 4$ eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = \frac{1}{2}$. Negative Funktionswerte $f(x) < 0$ ergeben sich also für alle x außerhalb des Intervalls zwischen den Nullstellen $x \notin \left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

3 Exponentialfunktion und Logarithmen

3.1 Exponentialfunktion

Es sei a eine positive reelle Zahl ($a \neq 1$). Dann heißt die Funktion

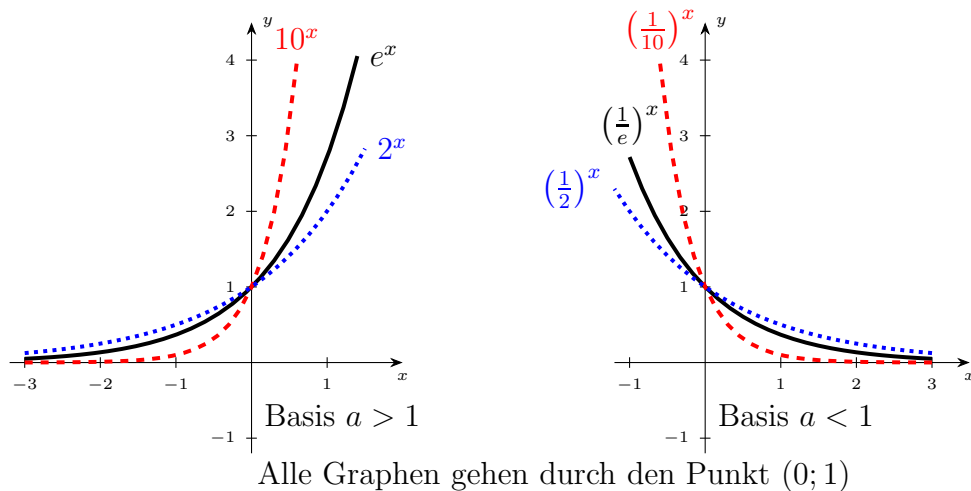
$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a .

Bekannteste Funktion ist die Exponentialfunktion zur Basis e , diese wird nur mit $\exp(x) = e^x$ bezeichnet.

Rechenregeln (folgen direkt aus den Potenzgesetzen)

$$\begin{aligned} \exp_a 0 &= 1 \\ \exp_a(x + y) &= \exp_a x \cdot \exp_a y & a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\ \exp_a(x - y) &= \frac{\exp_a x}{\exp_a y} & a^{x-y} &= a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} \\ \exp_a(-x) &= \exp_{\frac{1}{a}}(x) & a^{-x} &= \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \end{aligned}$$



3.2 Logarithmen

Unter dem Logarithmus c einer positiven reellen Zahl a zu einer positiven reellen Basis $b \neq 1$ versteht man diejenige Zahl c , mit der die Basis b zu potenzieren ist, um a zu erhalten:

D.h. b hoch was ergibt a ?

$$c = \log_b(a) \iff b^c = a; \quad a > 0, b > 0, b \neq 1, c \text{ beliebig}$$

Spezielle Logarithmen:

Basis e	$\ln(x) = \log_e(x)$	(natürlicher Logarithmus – Logarithmus naturalis)
Basis 10	$\lg(x) = \log(x) = \log_{10}(x)$	(dekadischer Logarithmus)
Basis 2	$\text{ld}(x) = \log_2(x)$	(Logarithmus dualis)

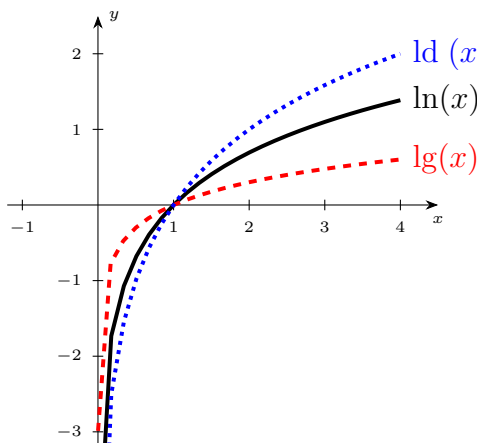
Einfache Beispiele:

$$\log_2(4) = 2, \quad \log_{10}(1000) = 3, \quad \log_{10}(0,1) = -1 \quad \log_3(27) = 3, \quad \log_4(2) = 0,5$$

Insbesondere gilt:

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{und} \quad \ln(e^x) = x \quad \ln(1) = 0$$

Graphische Darstellung – alle Graphen gehen durch den Punkt (1; 0)



Logarithmengesetze – gelten für beliebige Basen b

$$\begin{aligned}\log_b(1) &= 0 \\ \log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y) \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) \\ \log_b(x^a) &= a \log_b(x)\end{aligned}$$

D.h. insbesondere:

$$\log_b(x^2) = 2 \log_b x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \log_b(x) = \log_b(\sqrt{x}) \quad \text{und} \quad -\log_b(x) = \log_b(x^{-1}) = \log_b\left(\frac{1}{x}\right)$$

Achtung:

$$\log_b(x^2) \neq (\log_b x)^2 : \quad \log_b(x^2) = 2 \log_b(x) = \log_b(x) + \log_b(x) \quad (\log_b x)^2 = \log_b(x) \cdot \log_b(x) = \log_b^2(x)$$

Der letzte Ausdruck ist nur eine vereinfachte Schreibweise, um sich die Klammern zu sparen.

Umrechnung der Logarithmen ineinander:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\lg(x)}{\lg(b)} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Beispiel zur Anwendung der Logarithmengesetze:

$$\begin{aligned}\lg\left(\frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}\right) &= \lg(a^2 - b^2) - \lg(a^2 + b^2)^2 \\ &= \lg(a^2 - b^2) - 2 \lg(a^2 + b^2) \\ &= \lg(a + b) + \lg(a - b) - 2 \lg(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

Die erste Zeile ist definiert für alle a, b mit $a^2 > b^2$ (also auch für $a = -2$ und $b = 1$), in der letzten Zeile muss zusätzlich $a + b > 0 \iff a > -b$ und $a - b > 0 \iff a > b$, d.h. $a > |b|$ gelten.

Anwendungen: Lautstärke wird in dB (Dezibel) auf einer logarithmischen Skala gemessen, wobei eine Anhebung des dB-Wertes um 10 dB einer Verstärkung um den Faktor 10 entspricht. Der Hersteller einer Gehörschutzwanne gibt für sein Produkt eine Schalldämpfung um 27 dB an. Um welchen Faktor dämpft die Wanne die Lautstärke?

Die verschiedenen Logarithmen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor, daher kann man mit einer beliebigen Logarithmusfunktion z.B. dem dekadischen arbeiten.

Einer Lautstärke y entspricht dann der dB Wert $x = c \lg y$. Nach obigen Angaben hat dann die 10 fache Lautstärke, also $10y$ einen dB Wert von $x + 10 = c \lg(10y)$

$$x + 10 = c \lg(10y) = c(\lg(10) + \lg(y)) = c \lg(10) + c \lg(y) = c \lg 10 + x = c + x \Rightarrow c = 10$$

Eine Dämpfung um 27 dB bedeutet eine Verstärkung um -27 dB. λ sei der gesuchte Faktor, dann gilt:

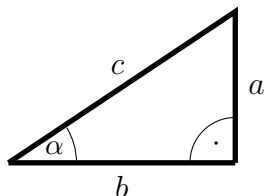
$$\begin{aligned}x - 27 &= c \lg(\lambda y) = c \lg(\lambda) + c \lg(y) = c \lg(\lambda) + x \\ \Rightarrow -27 &= c \lg(\lambda) = 10 \lg(\lambda) \Rightarrow \lambda = 10^{-2,7} \approx \frac{1}{500} = 0,002\end{aligned}$$

Die Wanne dämpft also die Lautstärke auf etwa $\frac{1}{500}$.

In diesem Beispiel hätte man mit jedem beliebigen Logarithmus arbeiten können, für c hätten sich unterschiedliche Werte ergeben, für λ erhält man aber immer das gleiche Ergebnis.

4 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)

4.1 Winkelfunktionen im Dreieck



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

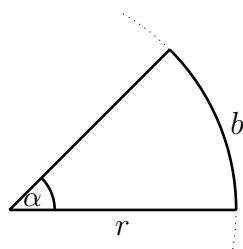
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

4.2 Bogenmaß

Ein Winkel α kann entweder im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen werden. Das Bogenmaß x des Winkels α ist das Verhältnis der Bogenlänge zum Radius am Kreisabschnitt mit Mittelpunktswinkel α . x ist eine dimensionslose Größe und unabhängig vom Radius r . Einer vollen Umdrehung $\alpha = 360^\circ$ entspricht das Bogenmaß $x = 2\pi$.



Das Bogenmaß von α ergibt sich wie folgt:

$$\text{arc}(\alpha) = \frac{b}{r}$$

Umrechnungsformel

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \iff \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}$$

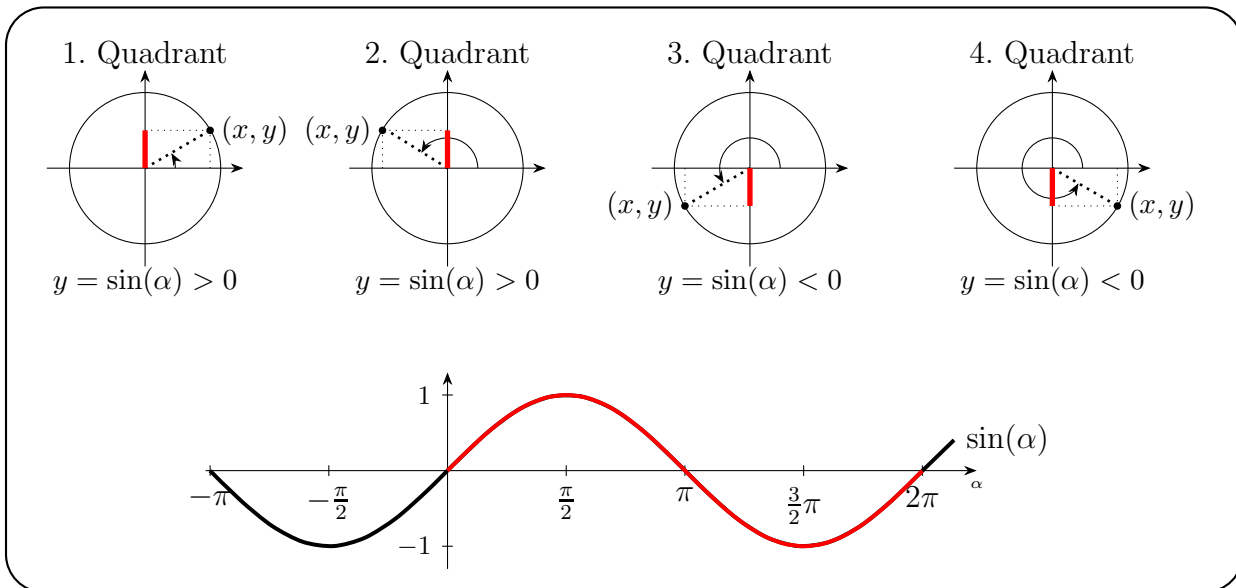
Eine Winkelangabe im Bogenmaß muss kein Vielfaches und auch kein Teil von π sein. Man erkennt eine Winkelangabe im Bogenmaß nur am Fehlen des Gradzeichens $^\circ$.

Wichtige Winkel

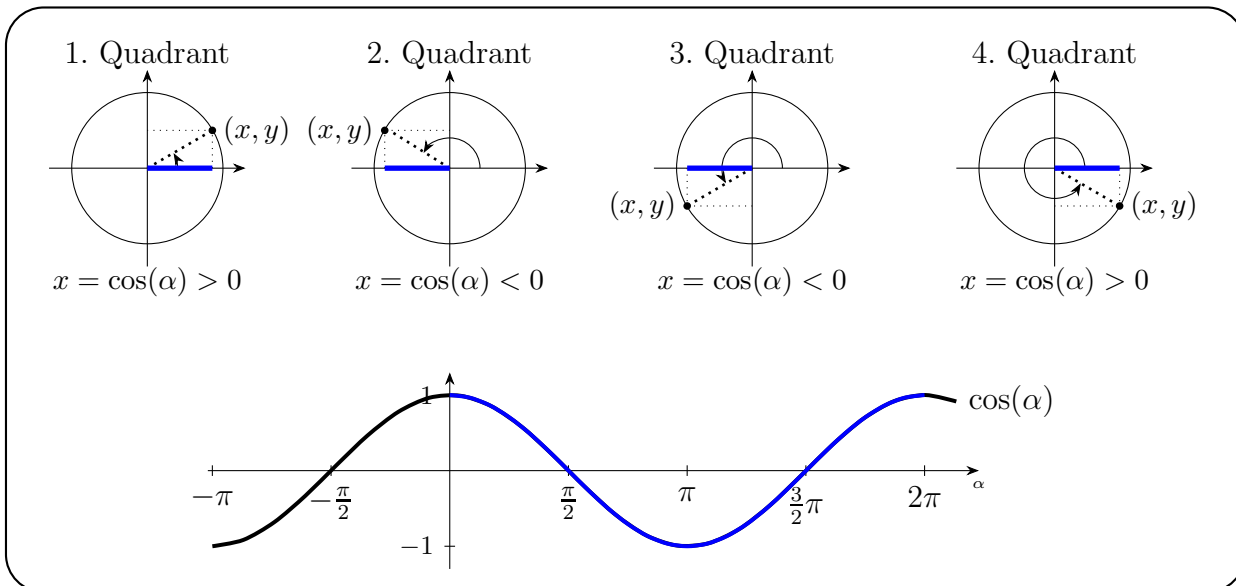
Gradmaß α	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß $\text{arc}(\alpha)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

4.3 Winkelfunktionen am Kreis

Die Sinusfunktion



Die Kosinusfunktion



Wichtige Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
 (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 &= 1 & \text{bzw.} & & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\
 \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha) & & \text{(Periode } 2\pi) \\
 \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\
 \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\
 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha) & & & \text{(Sinus nach links verschieben ergibt Kosinus)} \\
 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\alpha) & & & \text{(Kosinus nach rechts verschieben ergibt Sinus)}
 \end{aligned}$$

Die Schreibweise $\sin^2 x$ bedeutet:

$$\sin^2(x) = (\sin(x))^2 \quad \text{nicht} \quad \sin^2(x) \neq \sin(x^2)$$

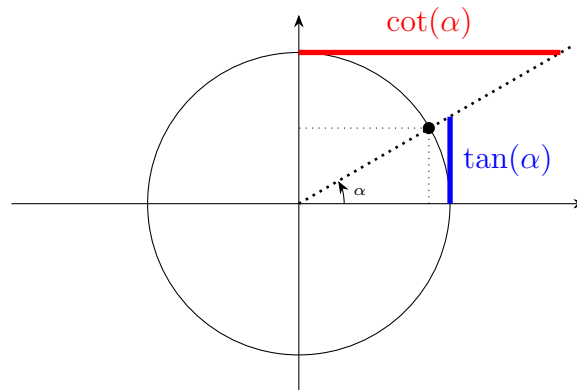
Die Schreibweise wurde eingeführt, um ein paar Klammern zu sparen.

Tangensfunktion und Kotangensfunktion

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (\text{nicht definiert f\u00fcr } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (\text{nicht definiert f\u00fcr } \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Achtung: Die Kotangensfunktion ist nicht die Umkehrfunktion der Tangensfunktion. Die Umkehrfunktion ist der Arkustangens $\arctan(x) \neq \frac{1}{\tan(x)}$. (Auch wenn auf dem Taschenrechner $\tan^{-1}(\cdot)$ f\u00fcr die Umkehrfunktion steht, damit ist $\arctan(\cdot)$ gemeint).



Die Vorzeichen der Winkelfunktionen:

	1. Quadrant $(0, \frac{\pi}{2})$	2. Quadrant $(\frac{\pi}{2}, \pi)$	3. Quadrant $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	4. Quadrant $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin(\alpha)$	+	+	-	-
$\cos(\alpha)$	+	-	-	+
$\tan(\alpha)$	+	-	+	-
$\cot(\alpha)$	+	-	+	-

Einige spezielle Werte f\u00fcr die Winkelfunktionen:

α	$\arcsin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0°	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	nicht def.
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	nicht def.	0

4.4 Umkehrfunktionen–Arkusfunktionen

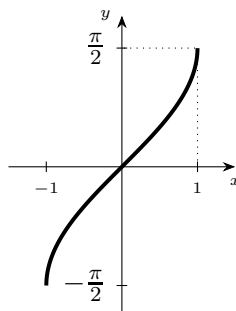
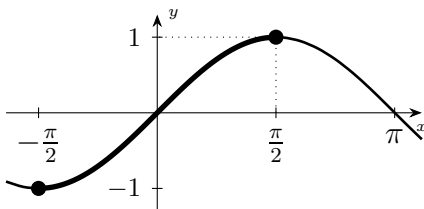
Die trigonometrischen Funktionen sind auf \mathbb{R} nicht umkehrbar eindeutig, sondern es gibt mehrere Werte im Definitionsbereich mit dem gleichen Funktionswert. Deshalb existieren keine geschlossenen Umkehrfunktionen, sondern die Umkehrfunktionen werden durch Einschr\u00e4nkung auf geeignete Intervalle auf denen

- die Funktionen streng monoton sind
- auf denen der gesamte Wertebereich angenommen wird.

definiert.

- Die Arkussinusfunktion $y = \arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ beschränkten Sinusfunktion $y = \sin(x)$.
- Die Arkuscosinusfunktion $y = \arccos(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $0 \leq x \leq \pi$ beschränkten Kosinusfunktion $y = \cos(x)$.
- Die Arkustangensfunktion $y = \arctan(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $-\pi/2 < x < \pi/2$ beschränkten Tangensfunktion $y = \tan(x)$.
- Die Arkuscotangensfunktion $y = \operatorname{arccot}(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $0 < x < \pi$ beschränkten Kotangensfunktion $y = \cot(x)$.

$\sin(x)$ und $\arcsin(x)$

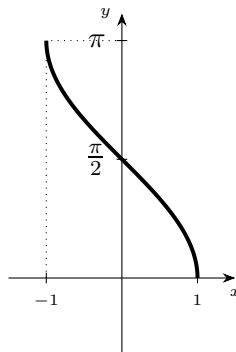
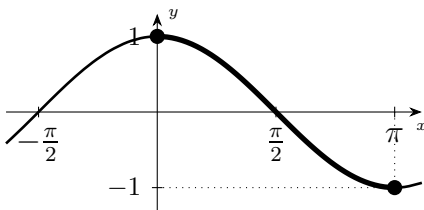


$$y = \arcsin(x)$$

$$\text{Definitionsbereich: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Wertebereich: } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$\cos(x)$ und $\arccos(x)$

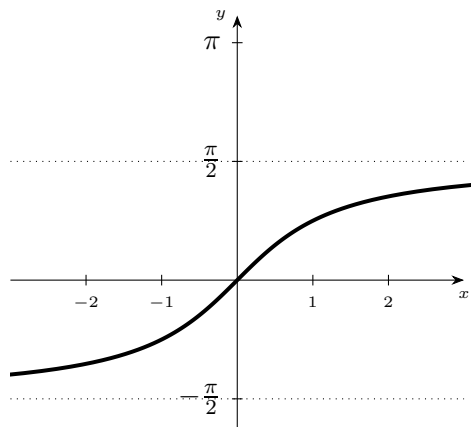
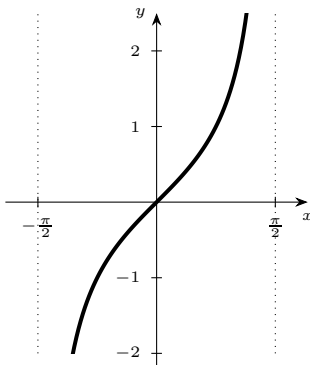


$$y = \arccos(x)$$

$$\text{Definitionsbereich: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Wertebereich: } 0 \leq y \leq \pi$$

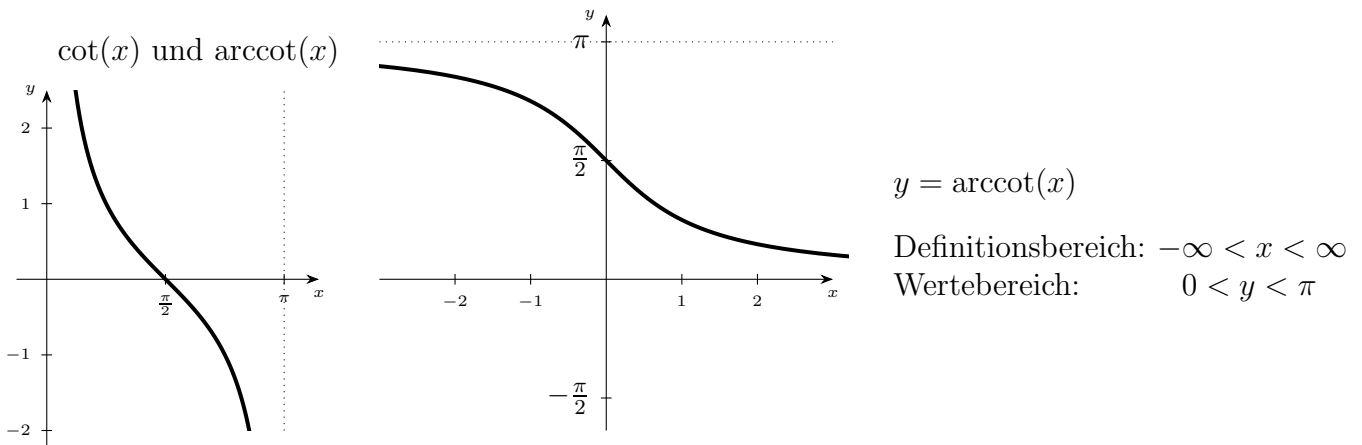
$\tan(x)$ und $\arctan(x)$



$$y = \arctan(x)$$

$$\text{Definitionsbereich: } -\infty < x < \infty$$

$$\text{Wertebereich: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



4.5 Bedienung Taschenrechner

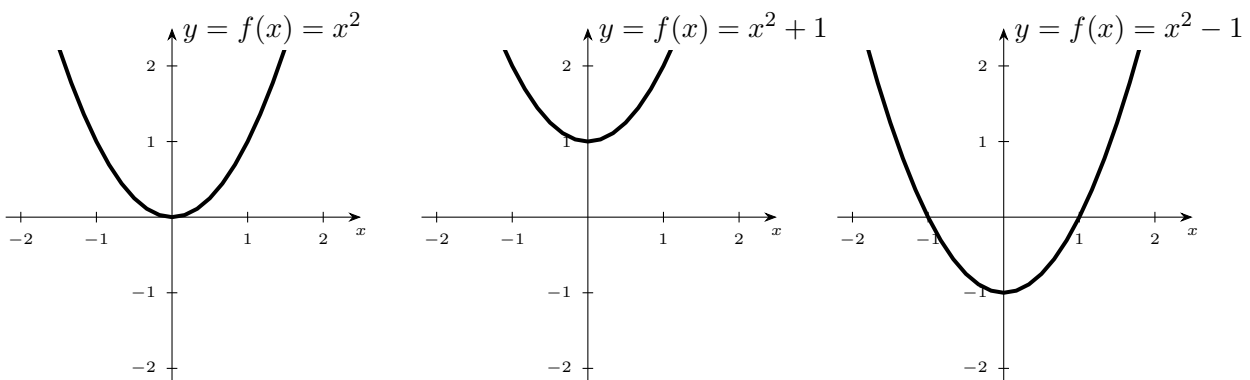
Bei der Berechnung von Winkelfunktionswerten und deren Umkehrungen sind folgende Punkte zu beachten:

- Der Winkel α ist gegeben und ein Funktionswert (z.B. $\sin(\alpha)$) ist gesucht.
 α im Gradmaß, d.h. $\star\star^\circ$ – Taschenrechner auf DEG (wie Degree) stellen.
 α im Bogenmaß, d.h. $\star\star$ ohne $^\circ$ – Taschenrechner auf RAD (wie Radian) stellen.
- Ein Funktionswert (z.B. $\sin(\alpha)$) ist gegeben und α ist gesucht.
 Die Umkehrfunktionen werden auf dem Taschenrechner meist mit $\sin^{-1}(\cdot), \dots$ bezeichnet und sind über die Shift Taste auf der gleichen Taste wie $\sin(\cdot), \dots$ zu finden.
 Die Einstellung DEG oder RAD ist zunächst egal, aber:
 Bei DEG ist $\arcsin(0,5) = 30^\circ$ Ergebnis im Gradmaß.
 Bei RAD ist $\arcsin(0,5) = 0,523 = \frac{\pi}{6}$ Ergebnis im Bogenmaß.

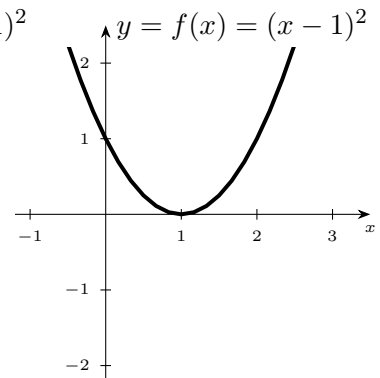
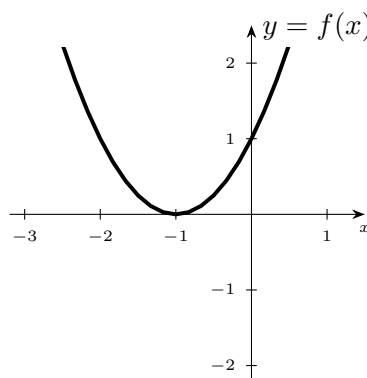
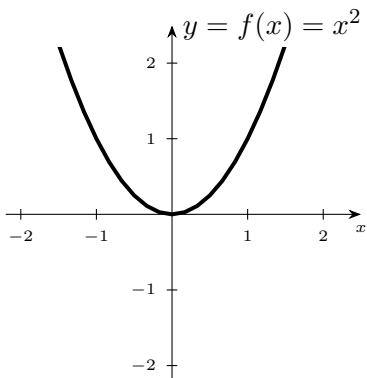
5 Funktionen

5.1 Allgemeines

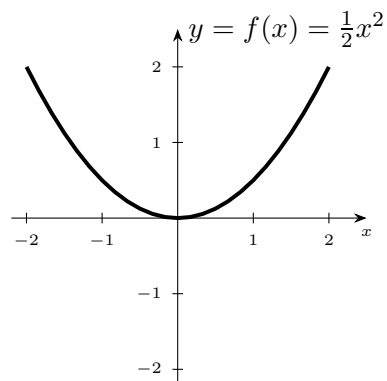
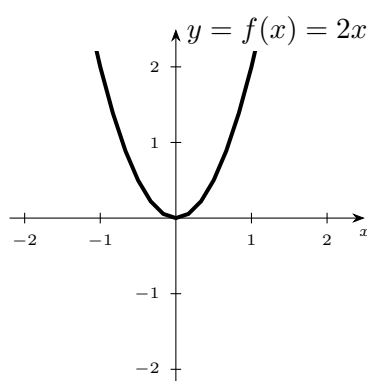
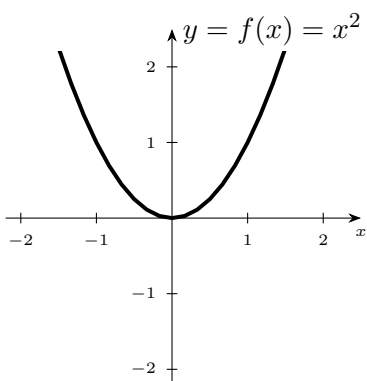
Verschiebung entlang der y -Achse



Verschiebung entlang der x -Achse



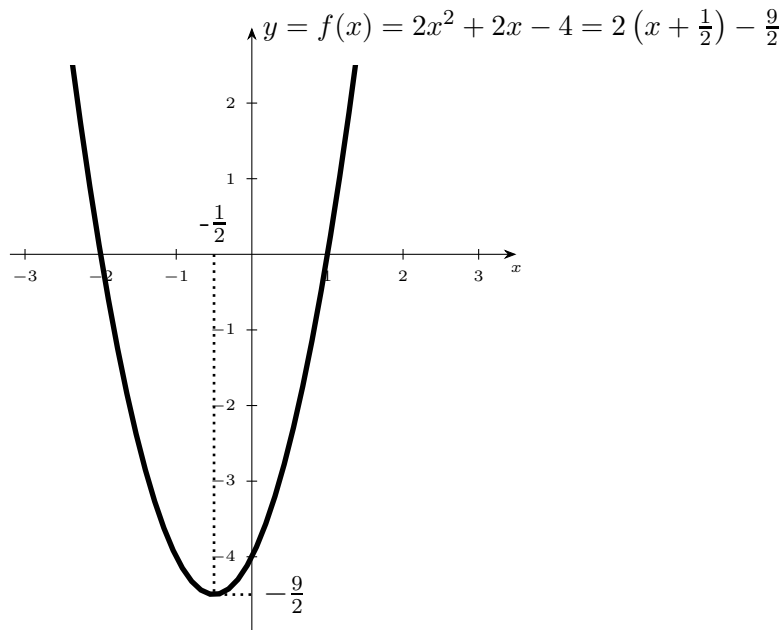
Streckung und Stauchung



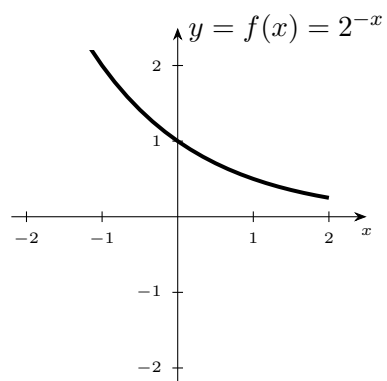
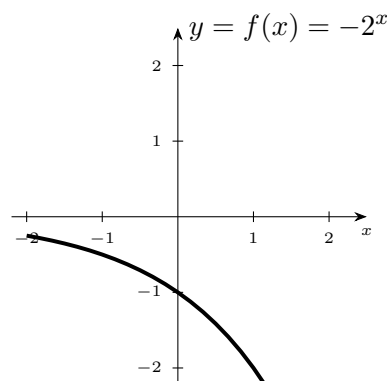
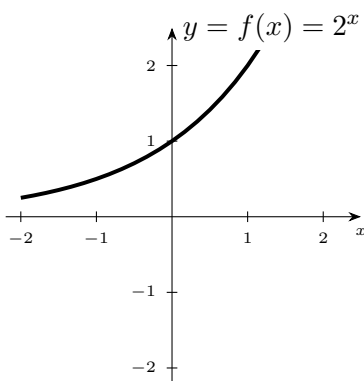
Allgemeine quadratische Funktion:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2) \\ &= 2(x^2 + x - 2) \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \right] \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right] \\ &= 2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Also um $\frac{1}{2}$ nach links verschoben, um 2 gestreckt und um $\frac{9}{2}$ nach unten verschoben



Spiegelungen an x -Achse und y -Achse



Verkettung von Funktionen

Ist für $x \in D$ eine Funktion $z = g(x)$ mit dem Wertebereich W gegeben und ferner für $z \in W$ eine Funktion $y = f(z)$, dann heißt

$$y = f(g(x)), \quad x \in D$$

mittelbare (oder verkettete) Funktion. Andere Schreibweise: $y = (f \circ g)(x)$.

Beispiele:

$$y = \sin(x^2) \Rightarrow z = x^2 \quad \text{und} \quad y = \sin(z)$$

$$y = (\sin x)^2 \Rightarrow z = \sin x \quad \text{und} \quad y = z^2$$

$$y = e^{2x+4} \Rightarrow z = 2x+4 \quad \text{und} \quad y = e^z$$

Umkehrfunktionen: Sei $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in W$ ist eine eindeutige Funktion (d.h. zu jedem Bildpunkt $y \in W_f$ gehört genau ein Urbildpunkt x mit $y = f(x)$). Dann ist die Umkehrfunktion von f die Funktion f^{-1} :

$$f^{-1} : W \rightarrow D \quad \text{mit} \quad f^{-1}(y) = x, \quad \text{wobei} \quad y = f(x).$$

Passen Definitions- und Wertebereich von f , so gilt:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Regeln zu Bestimmung der Umkehrfunktion:

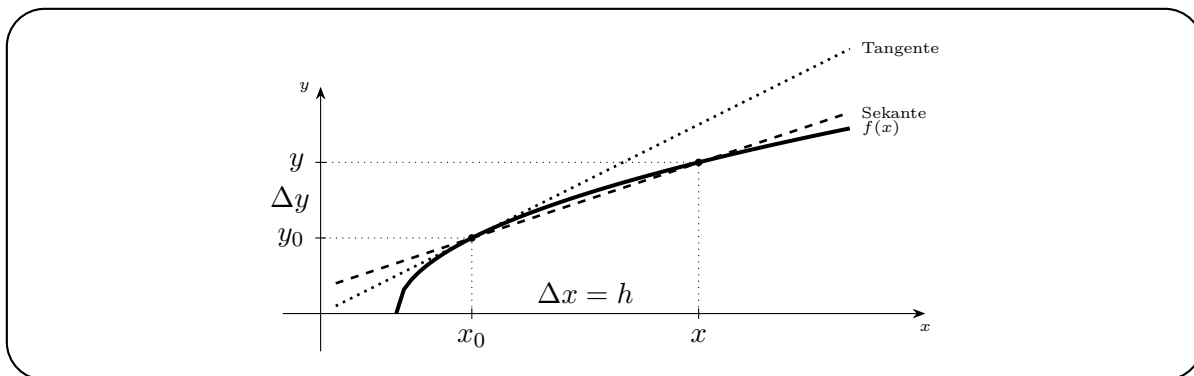
- Testen, ob f umkehrbar ist, gegebenenfalls Definitionsbereich einschränken, z. B. bei x^2 auf $x \geq 0$.
- Umstellen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x . Man erhält $x = g(y)$.
- Formales Vertauschen von abhängiger und unabhängiger Variable: $f^{-1}(x) = g(x)$

Den Graphen der Funktion f^{-1} erhält man durch Spiegelung des Graphen von f an der Gerade $y = x$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &= \frac{2x + 3}{x - 1} \\
 y &= \frac{2x + 3}{x - 1} \\
 y(x - 1) &= 2x + 3 \\
 yx - y &= 2x + 3 \\
 xy - 2x &= y + 3 \\
 x(y - 2) &= y + 3 \\
 x &= \frac{y + 3}{y - 2} \\
 f^{-1}(x) &= \frac{x + 3}{x - 2}
 \end{aligned}$$

5.2 Differenzieren



Berechnung des Anstiegs der Sekante (gestrichelte Gerade)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dieser Quotient heißt Differenzenquotient. Wird der Abstand der Punkte x und x_0 immer kleiner, d.h. $\Delta x = h \rightarrow 0$, so nähern sich auch die Funktionswerte einander an und aus der Sekante wird die Tangente. Der Anstieg der Tangente an die Funktion im Punkt $(x_0; f(x_0))$ heißt Ableitung der Funktion in x_0 .

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Quotient wird auch Differentialquotient genannt und dy bzw. dx die Differentiale. Die Ableitung einer konstanten Funktion $y = f(x) = c$ ist Null, denn

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Die Ableitung einer linearen Funktion $y = f(x) = mx$ ist m , denn

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{m(x_0 + h) - mx_0}{h} = \frac{mh}{h} = m \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m$$

Ableitung einfacher Funktionen

$$\begin{aligned}(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \quad \text{für alle } n \neq 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (e^x)' &= e^x\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}(x^2)' &= 2x \\ (x^3)' &= 3x^2 \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ (\sqrt{x})' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Einfache Regeln:

$$\begin{aligned}(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x) && \text{(Multiplikation mit einer Konstanten)} \\ (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) && \text{(Ableitung einer Summe)} \\ (f(x) - g(x))' &= f'(x) - g'(x) && \text{(Ableitung einer Differenz)}\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3)' &= 2x + 3x^2 \\ (5x^4)' &= 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 \\ \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Kompliziertere Regeln:

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) && \text{(Ableitung eines Produktes)} \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} && \text{(Ableitung eines Quotienten)}\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}[(x^2 + 1)(x^3 + x^4)]' &= 2x(x^3 + x^4) + (x^2 + 1)(3x^2 + 4x^3) \\ \left[\frac{x^2 + 2}{x^3 + x}\right]' &= \frac{2x(x^3 + x) - (x^2 + 2)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2}\end{aligned}$$

Kettenregel-Ableitung einer mittelbaren (bzw. verketteten) Funktion

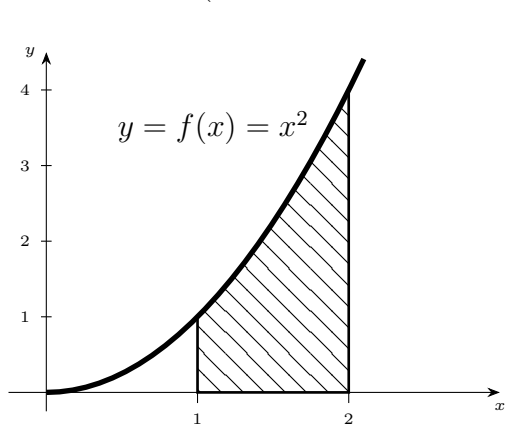
$$[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}[(x^2 + 1)^2]' &= 2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ \left[\sqrt{x^2 + 4x}\right]' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \cdot (2x + 4) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} \\ [e^{x^2}]' &= e^{x^2} \cdot 2x \\ \left[\left((\sqrt{x} + x)^2 + x\right)^3\right]' &= 3 \left((\sqrt{x} + x)^2 + x\right)^2 \cdot \left[2(\sqrt{x} + x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) + 1\right]\end{aligned}$$

5.3 Integrieren

Die Aufgabe, die Fläche A zwischen dem Graphen einer im Intervall $[a, b]$ definierten Funktion $y = f(x)$, der x -Achse $y = 0$ und den Parallelen zur y -Achse $x = a$ und $x = b$ zu berechnen (schraffierte Fläche im Bild), führt zum Begriff des bestimmten Integrals.



$$A = \int_a^b x^2 dx$$

bzw. Allgemein:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Integration als Umkehrung der Differentiation.

$$y = f(x) \quad \xrightarrow{\text{Differentiation}} \quad y = f'(x)$$

Umgekehrtes Problem: Die Aufgabe besteht darin, aus einer gegebenen Ableitung auf die Funktion zu schließen:

$$y = f'(x) \quad \xrightarrow{???} \quad y = f(x)$$

Stammfunktion: Ist $y = f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ definiert und existiert dort eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$, dann heißt $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$. Eine Stammfunktion $F(x)$ bezeichnet man auch mit

$$F(x) = \int f(x) dx$$

und nennt diesen Ausdruck unbestimmtes Integral.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Wichtigste Stammfunktion:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{für alle } n \neq -1$$

$$\int a dx = \int a \cdot x^0 dx = \frac{1}{0+1} \cdot a \cdot x^{0+1} + C = a \cdot x + C \quad (\text{Spezialfall von oben})$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}\int x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ \int x dx &= \int x^1 dx = \frac{1}{2}x^2 + C \\ \int 1 dx &= \int x^0 dx = \frac{1}{1}x^1 + C = x + C \\ \int \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ \int \frac{1}{x^2} dx &= \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Damit berechnet sich die schraffierte Fläche:

$$A = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,33$$

6 Vektorrechnung

6.1 Definitionen und einfache Rechenregeln

Vektoren: Ein Vektor ist eine gerichtete und orientierte Strecke im Raum (oder in der Ebene). Er wird eindeutig durch drei Größen bestimmt: Richtung, Orientierung und Länge.

Größen, die durch eine einzige reelle Zahl charakterisiert werden, heißen skalare Größen. Beispiele sind Temperatur, Arbeit, Masse und Energie. Beispiele für Vektoren sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke.

Bezeichnungen:

\vec{a}, \vec{b}, \dots oder \vec{PQ} , dann ist P der Anfangspunkt (Fußpunkt) und Q der Endpunkt (Spitze).

Eigenschaften: Der Betrag eines Vektors ist seine Länge: $\|\vec{a}\|$ (manchmal auch $|\vec{a}|$). Der Betrag ist immer größer oder gleich Null.

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind gleich $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie gleichen Betrag, gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben.

Dabei wird keine Aussage über den Anfangspunkt der Vektoren getroffen. Vektoren dürfen also frei im Raum verschoben werden. Gleiche Vektoren gehen durch Parallelverschiebung ineinander über.

Spezielle Vektoren:

Nullvektor - Länge 0 und unbestimmte Richtung - Bezeichnung $\vec{0}$:

Einheitsvektoren - Alle Vektoren der Länge 1 - Bezeichnung \vec{e} mit $\|\vec{e}\| = 1$

Multiplikation mit einer reellen Zahl (Skalar) Es sei \vec{a} ein Vektor und λ eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dann ist $\lambda\vec{a}$

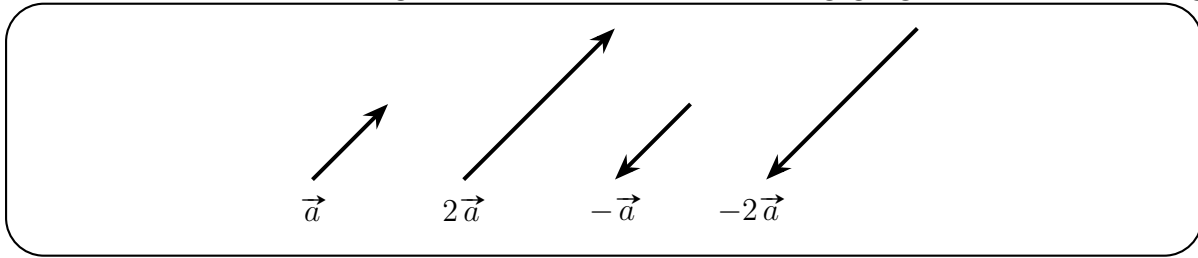
- der Vektor mit der Länge $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$ und
- der gleichen Richtung wie der Vektor \vec{a} .
- Für $\lambda > 0$ haben $\lambda\vec{a}$ und \vec{a} die gleiche Orientierung ($\vec{a} \uparrow \uparrow \lambda\vec{a}$ - parallel). Für $\lambda < 0$ haben die beiden Vektoren entgegengesetzte Orientierung. ($\vec{a} \uparrow \downarrow \lambda\vec{a}$ - antiparallel).
- $\lambda = 0 \Rightarrow 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (Nullvektor).

Beispiele:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ - Kraft = Masse mal Beschleunigung (Newtonsches Aktionsprinzip)

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ - Kraft auf Punktladung q im elektrischen Feld \vec{E} .

Für $\lambda = -1$ erhält man den gleichen Vektor nur mit der entgegengesetzten Orientierung.



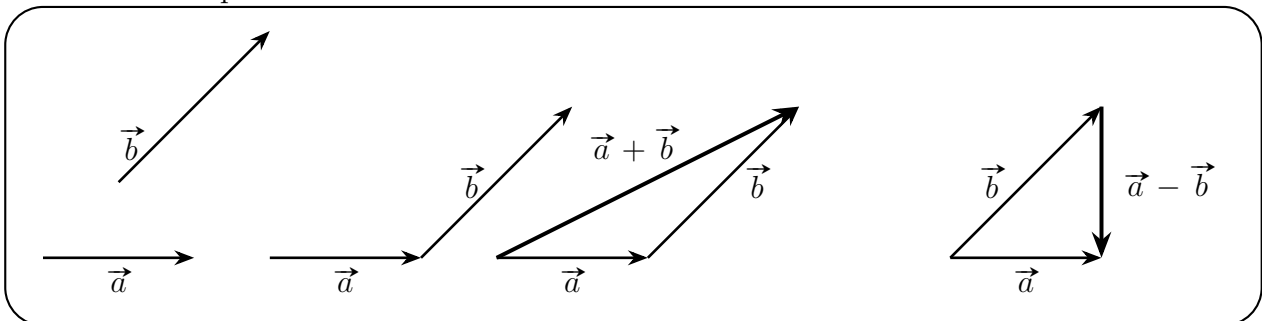
Vektoraddition: Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Dann wird der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ folgendermaßen konstruiert.

- Verschiebe \vec{b} , so dass der Endpunkt von \vec{a} (Spitze) mit dem Anfangspunkt (Fußpunkt) von \vec{b} zusammenfällt.
- Der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann der Vektor vom Anfangspunkt von \vec{a} zum Endpunkt von \vec{b} .

Vektorsubtraktion: Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Dann wird der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}.$$

Legt man die Anfangspunkte von \vec{a} und \vec{b} übereinander, dann ist $\vec{a} - \vec{b}$ der Vektor von der Spitze von \vec{b} zur Spitze von \vec{a} .



Eigenschaften von Addition und skalarer Multiplikation:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} && \text{(Kommutativgesetz)} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} && \text{(Assoziativgesetz)} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) && \text{(Distributivgesetz)} \end{aligned}$$

6.2 Koordinatendarstellung eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

6.3 Skalarprodukt

Definition: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar (d.h. eine Zahl, kein Vektor).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Alternative

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \varphi$$

Dabei ist φ der von den Vektoren eingeschlossenen Winkel.

Anwendung des Skalarprodukts: Winkelberechnung

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist das Skalarprodukt = 0 und umgekehrt.

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{a} &= \|\vec{a}\|^2\end{aligned}$$

Was bedeutet:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) &=? \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} &=?\end{aligned}$$

Alle Definitionen und Rechenregeln lassen sich ins dreidimensionale übertragen.

6.4 Geradengleichungen

Punkt-Richtungsgleichung:

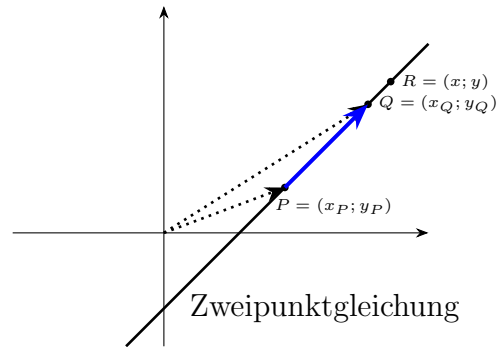
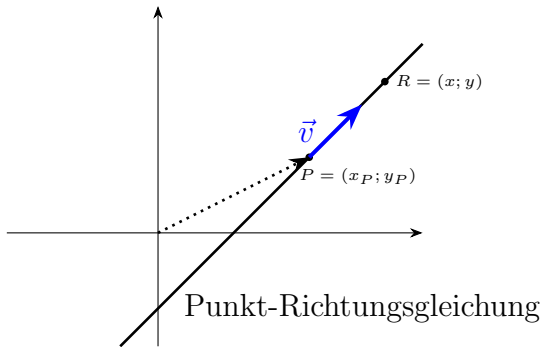
Ein Punkt $R = (x; y)$ liegt auf einer Geraden durch $P = (x_P; y_P)$ mit Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, wenn er wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Zweipunkt-Gleichung:

Ein Punkt $R = (x; y)$ liegt auf einer Geraden durch $P = (x_P; y_P)$ und $Q = (x_Q; y_Q)$, wenn er wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \right], \quad t \in \mathbb{R}$$



Setzt man $y = y_P + t(y_Q - y_P)$ und $x = x_P + t(x_Q - x_P)$, so ergibt sich die nichtvektorielle Form:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{x - x_P}$$

6.5 Kreisgleichung

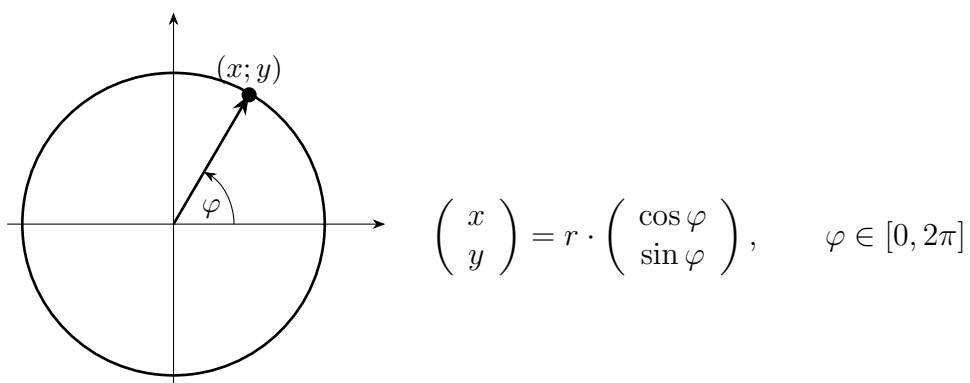
Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius $r = 1$:

Ein Punkt $P = (x; y)$ liegt auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ um den Punkt $(0; 0)$, wenn er wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

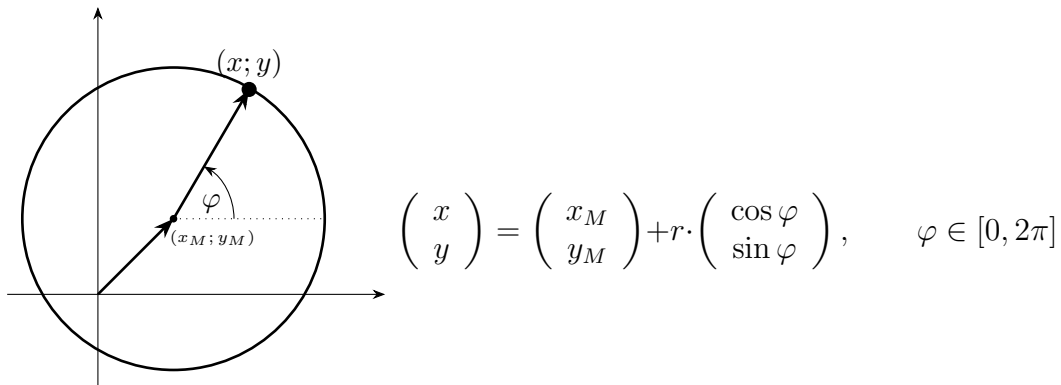
Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius r beliebig:

Ein Punkt $P = (x; y)$ liegt auf einem Kreis mit dem Radius r um den Punkt $(0; 0)$, wenn er wie folgt dargestellt werden kann:



Allgemeiner Kreis in Vektordarstellung:

Ein Punkt $P = (x; y)$ liegt auf einem Kreis mit dem Radius r um den Punkt $(x_M; y_M)$, wenn er wie folgt dargestellt werden kann:



Umrechnung in die nichtvektorielle Form

Mittelpunkt im Ursprung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Mittelpunkt beliebig:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$x - x_M = r \cos \varphi \quad y - y_M = r \sin \varphi$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$